PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

1º) Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15.000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Sean x, y, z el número de seguidores que tienen en la red social Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15.000 \\ 0{,}75z=3x \\ 0{,}5x+0{,}2y=0{,}25z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=15.000 \\ 0{,}25z=x \\ 50x+20y=25z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=15.000 \\ 4x-z=0 \\ 10x+4y-5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=4x.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+4x=15.000 \\ 10x+4y-20x=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x+y=15.000 \\ -5x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15.000; \;\; y=5.000.$$

$$5x+5.000=15.000; \;\; 5x=10.000; \;\; x=2.000. \quad z=8.000.$$

$$\underline{Sara\ tiene\ 2.000\ seguidores; Cristina, 5.000\ y\ Jimena, 8.000.}$$

****

2º) a) Calcule, en caso de existir, el valor de los límites siguientes:

$a_1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x}$. $\qquad a_2)\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right]$.

(Indicación: use el cambio de variable $t=1/x$ donde sea necesario).

b) Calcule las siguientes integrales: $b_1)\ I=\int\frac{x}{x^2-1}\cdot dx$. $\qquad b_2)\ I=\int_0^1 x^2e^{-x}\cdot dx$.

----

a)

$$a_1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x}=\frac{0^2\cdot(1-0)}{0-2\cdot 0^2-sen\,0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(1-2x)+x^2\cdot(-2)}{1-4x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x}=\frac{0}{1-0-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{2-12x}{-4+sen\,x}=\frac{2-0}{-4+sen\,0}=\frac{2}{-4+0}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x}=-\frac{1}{2}}.$$

a_2)

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{3}{\infty^2}-\frac{2}{\infty\cdot sen\,\frac{1}{\infty}}=\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty\cdot sen\,0}=0-\frac{2}{\infty\cdot 0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{sen\,\frac{1}{x}}=$$

$$=-\frac{\frac{2}{\infty}}{sen\,\frac{1}{\infty}}=-\frac{0}{sen\,0}=-\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot cos\,\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{cos\,\frac{1}{x}}=$$

$$=-\frac{2}{\cos\frac{1}{\infty}}=-\frac{2}{\cos 0}=-\frac{2}{1}\Rightarrow\underline{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right]=-2.}$$

b)

$$b_1)\ I=\int\frac{x}{x^2-1}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x^2-1=t\\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot Lt+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{I=\int\frac{x}{x^2-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot L|x^2-1|+C.}$$

b_2)

$I=\int_0^1 x^2e^{-x}\cdot dx$. En primer lugar, se resuelve la integral indefinida:

$$I=\int f(x)\cdot dx=\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=x^2\to du=2x\cdot dx\\ dv=e^{-x}\cdot dx\to v=-e^{-x}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2\int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = I. \quad (*)$$

$$M = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x+1) + C = M.$$

Sustituyendo el valor de M en la expresión (*):

$$I = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot M = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x+1)] + C =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}(x+1) + C \Rightarrow I = \int x^2 e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} \cdot dx = [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)]_0^1 = [e^{-x}(x^2 + 2x + 2)]_1^0 =$$

$$= [e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 2)] - [e^{-1}(1^2 + 2 \cdot 1 + 2)] = 2 - \frac{1+2+2}{e} = 2 - \frac{5}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int_0^1 x^2 e^{-x} \cdot dx = \frac{2e-5}{e}}.$$

****

3º) Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1=y+1=\frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano β, perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) Calcular una ecuación de la recta t que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,2)$, que es, a su vez, el vector normal del plano β.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y-z=6$ es $\vec{n}=(1,1,-1)$.

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales.

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\beta \Rightarrow \cos\beta=\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|(1,1,2)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1+1^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{|1+1-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{10}}=0 \Rightarrow \underline{\beta=90° \Rightarrow Los\ planos\ son\ perpendiculares}.$$

b)

La recta r y el plano π son paralelos por ser el vector director de la recta y el vector normal del plano perpendiculares.

La distancia de la recta al plano es la misma que la de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de r es $P(1,-1,2)$.

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(1,-1,2)$ y al plano $\pi \equiv x+y-z-6=0$:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|1\cdot1+1\cdot(-1)-1\cdot2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\underline{d(r,\pi)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

c)

Si la recta t no corta al plano π tiene que ser paralelo a él, por lo cual, el vector director de t tiene que ser perpendicular al vector normal de π, $\vec{n} = (1, 1, -1)$. También es el vector director de t perpendicular al vector director de r, $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$, por lo cual, el vector director de t es linealmente dependiente del producto $\vec{n} \times \overrightarrow{v_r}$:

$$\vec{n} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - j + k - k + i - 2j = 3i - 3j = (3. -3. 0) \Rightarrow$$

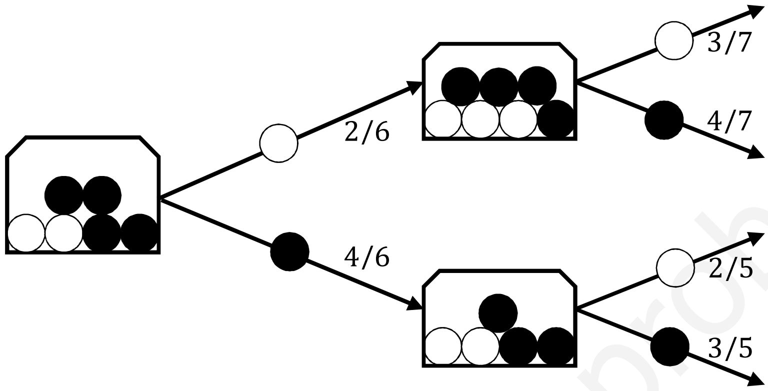
$$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, -1, 0) \;\Rightarrow\; \underline{t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases}}.$$

****

4º) En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?



$\rightarrow p = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

$\rightarrow p = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$

$\rightarrow p = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$\rightarrow p = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$a)$

$$P = P(b_1 n_2) + P(n_1 b_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{21} + \frac{4}{15} = \frac{20+28}{105} = \frac{48}{105} = \underline{\frac{16}{35} = 0{,}4571.}$$

$b)$

$$P = P(n_1/b_2) = \frac{P(n_1 \cap b_2)}{P(b_2)} = \frac{P(n_1) \cdot P(b_2/n_1)}{P(b_1) \cdot P(b_2/b_1) + P(n_1) \cdot P(b_2/n_1)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{7} + \frac{4}{15}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{15}}{\frac{15+28}{105}} = \frac{4 \cdot 105}{15 \cdot 43} = \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 43} = \underline{\frac{28}{43} = 0{,}6512.}$$

****

5º) $a)$ Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

$b)$ Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y, z cuyas soluciones sean: $x = \lambda, y = \lambda - 2, z = \lambda - 1$.

$c)$ Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y, que solo tenga como soluciones $x = 1$ e $y = 2$.

$a)$

Se trata de un sistema compatible indeterminado; las dos ecuaciones tienen que ser linealmente dependientes.

Por ejemplo: $\underline{\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right\}}$.

$b)$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, compatible indeterminado, con un grado de libertad; está formado por dos ecuaciones linealmente independientes cuyas soluciones son $x = 0, y = -2$ y $z = -1$, y una tercera ecuación que es combinación lineal de las otras dos, por ejemplo, su suma.

Ejemplo: $\underline{\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 7 \\ 3x - 4y + z = 7 \end{array}\right\}}$.

$c)$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, dos de las cuales son linealmente independientes y con soluciones $x = 1$ e $y = 2$, y la tercera es combinación lineal de las dos primeras.

Ejemplo: $\underline{\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x - 3y = -4 \\ 3x - 4y = -3 \end{array}\right\}}$.

****

6º) Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x < 0 \\ \ \ x \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 \ \ si \ \ x < 0 \\ x^3 - x + 2 \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$.

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R por ser polinómica, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 + x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x + 2) = 2 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{f(x) \ es \ continua \ en \ R}.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 \ \ si \ \ x < 0 \\ 3x^3 - 1 \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} \ 1 \ \ si \ \ x < 0 \\ -1 \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \underline{f(x) \ no \ es \ derivable \ en \ x = 0}.$$

$$\underline{f(x) \ es \ derivable \ en \ R - \{0\}}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+1=0 \Rightarrow x \notin R \\ 3x^2-1=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\begin{cases} 6x \;\; si \;\; x<0 \\ 6x \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}>0 \Rightarrow Mín. para\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\frac{\sqrt{3}}{3}+2=\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}+2=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}+18}{9}=\frac{18-2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right)}.$$

El punto $B(0, 2)$ es un punto anguloso por ser la función continua pero no derivable, por lo cual, la condición de máximo o mínimo relativo debe hacerse estudiando su monotonía en el entorno del punto.

Teniendo en cuenta que $f'(0)=\begin{cases} 1 \;\; si \;\; x<0 \\ -1 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

$$f'(0^-)=1>0 \Rightarrow Creciente. \qquad f'(0^+)=-1<0 \Rightarrow Decreciente.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo\ en\ B(0, 2)}.$$

$c)$

En el intervalo de la superficie a calcular, $(-1, 1)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que 0, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x+2) \cdot dx+\int_{0}^{1}(x^3-x+2) \cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}=0-\left[\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^2}{2}+2 \cdot (-1)\right]+$$

$$+\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}+2 \cdot 1\right)-0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=4-1 \Rightarrow \underline{S=3\ u^2}.$$

****

7º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$, $s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$.

a) Escriba una ecuación de la recta t perpendicular común a r y a s.

b) Calcule la distancia entre r y s.

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, -1, -4)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -3)$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda; \;\; x = 2 - \lambda; \;\; y = 1 + 2x + 2z;$$

$$y = 1 + 4 - 2\lambda + 2\lambda = 5 \;\Rightarrow\; s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2, 5, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 0, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} = [(2, 5, 0) - (2, -1, -4)] = (0, 6, 4)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

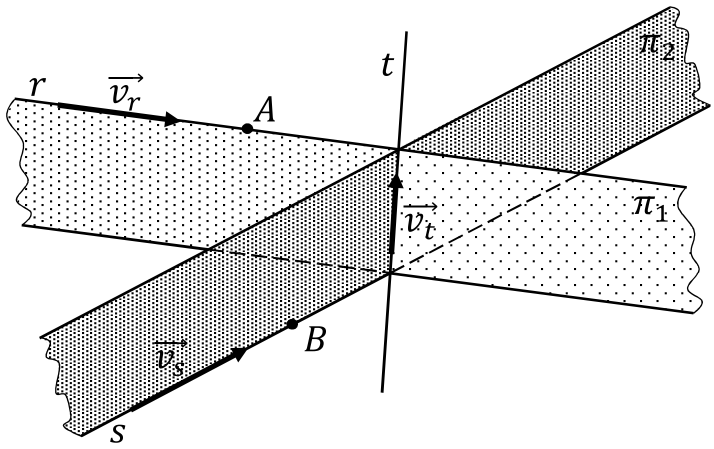
$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -18 + 6 - 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + j = -i - 2j - k \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, 2, 1).$$

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.



Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-2) - 3(y+1) + 2(z+4) - (z+4) + 6(x-2) - (y+1) = 0;$$

$$7(x-2) - 4(y+1) + (z+4) = 0;\ 7x - 14 - 4y - 4 + z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 7x - 4y + z - 14 = 0.$$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(y-5) + 2z + 2(x-2) - (y-5) = 0;\ \ 2(x-2) - 2(y-5) + 2z = 0;$$

$$2x - 4 - 2y + 10 + 2z = 0;\ \ 2x - 2y + 2z + 6 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - y + z + 3 = 0.$$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2:

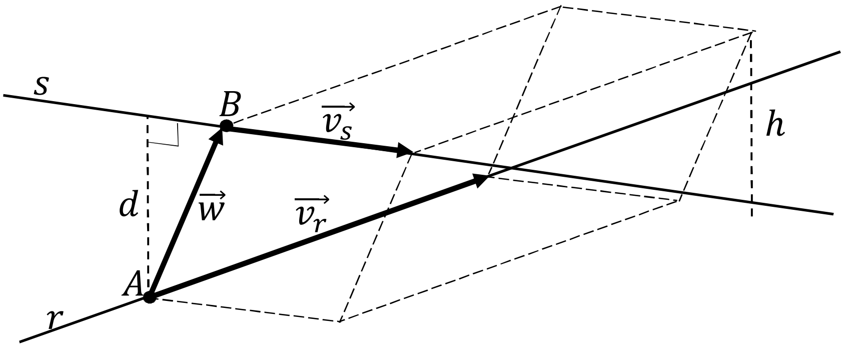
$$\underline{t \equiv \begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}}.$$

$b)$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (0, 6, 4)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.



Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \;\Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}.$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix} \right|} = \frac{|-16|}{|-i-2j-k|} = \frac{16}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{6}.$$

$$\underline{d(r,s) = \frac{8\sqrt{6}}{3}\,u.}$$

Otra forma de obtener la distancia es la siguiente:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas tienen las siguientes expresiones:

$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -4 - 3\mu \end{cases}$ $y\ s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases}$. Un punto genérico de cada una de las rectas son los siguientes: $P \in r \Rightarrow P(2+\mu, -1+\mu, -4-3\mu)\ y\ Q \in s \Rightarrow Q(2-\lambda, 5, \lambda)$.

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (\mu+\lambda, -6+\mu, -4-3\mu-\lambda).$$

El vector $\overrightarrow{QP}$ tiene que ser perpendicular a los vectores directores de las rectas, por lo cual, sus productos escalares tienen que ser ambos cero:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (\mu+\lambda, -6+\mu, -4-3\mu-\lambda) \cdot (1,1,-3) = 0;$$

$$\mu+\lambda-6+\mu+12+9\mu+3\lambda = 0;\;\; 11\mu+4\lambda = -6. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (\mu+\lambda, -6+\mu, -4-3\mu-\lambda) \cdot (1,0,-1) = 0;$$

$$\mu+\lambda+4+3\mu+\lambda = 0;\; 4\mu+2\lambda+4 = 0;\;\; 2\mu+\lambda = -2. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r}11\mu+4\lambda=-6\\ 2\mu+\lambda=-2\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}11\mu+2\lambda=-6\\ -8\mu-4\lambda=8\end{array}\right\} \Rightarrow 3\mu=2 \Rightarrow \mu=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{4}{3}+\lambda=-2;\ 4+3\lambda=-6 \Rightarrow 3\lambda=-10 \Rightarrow \lambda=-\frac{10}{3}.$$

Los puntos resultan ser:

$$P(2+\mu,-1+\mu,-4-3\mu) \approx P\left(2+\frac{2}{3},-1+\frac{2}{3},-4-2\right) \approx P\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3},-6\right).$$

$$Q(2-\lambda,5,\lambda) \approx Q\left(2+\frac{10}{3},5,-\frac{10}{3}\right) \approx Q\left(\frac{16}{3},5,-\frac{10}{3}\right).$$

La distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$:

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3},-6\right)-\left(\frac{16}{3},5,-\frac{10}{3}\right)=\left(-\frac{8}{3},-\frac{16}{3},-\frac{8}{3}\right).$$

$$d_{(r,s)}=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{6}=\frac{8\cdot\sqrt{6}}{3}.$$

$$\underline{d(r,s)=\frac{8\sqrt{6}}{3}u.}$$

****

8º) Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$p = 0{,}45;\ \ q = 1 - p = 0{,}55;\ \ n = 100;\ \ r = 40.$

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = P(40) = \binom{100}{40} \cdot 0{,}45^{40} \cdot 0{,}55^{60} = 1{,}3746 \cdot 10^{28} \cdot 0{,}45^{40} \cdot 0{,}55^{60}.$$

El valor del número combinatorio $\binom{100}{40}$ se ha obtenido en una aplicación on-line. Procediendo mediante cálculo logarítmico:

$$\log P = \log 1{,}3746 + 28 + 40 \cdot \log 0{,}45 + 60 \cdot \log 0{,}55 =$$

$$= 0{,}1382 + 28 - 13{,}8715 - 15{,}5782 = 28{,}1382 - 29{,}4497 = -1{,}3115.$$

$$P = antilog\ (-1{,}3115) = \underline{0{,}0488}.$$

b)

Por ser $n \cdot p > 5\ y\ n \cdot q > 5 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 100 \cdot 0{,}45 = 45 \\ 100 \cdot 0{,}55 = 55 \end{Bmatrix}$, puede aproximarse la distribución binomial, $B(n, p) = B(100; 0{,}45)$, un una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}45 = 45.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55} = \sqrt{24{,}75} \cong 4.98.$

$X = B(100;\ 0{,}45) \approx N(45;\ 4{,}98).$

Tipificando la variable: $Z \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{4{,}98}$ y considerando la corrección de Yates:

$$P = P(39{,}5 \leq X \leq 40{,}5) = P\left(\frac{39{,}5-45}{4{,}98} \leq Z \leq \frac{40{,}5-45}{4{,}98}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-5{,}5}{4{,}98} \leq Z \leq \frac{-4{,}5}{4{,}98}\right) = P(-1{,}10 \leq Z \leq -0{,}90) = P(0{,}90 \leq Z \leq 1{,}10)$$

$$= P(Z \leq -0{,}90) - P(Z \leq -1{,}10) = [1 - P(Z < 0{,}90)] - [1 - P(Z < 1{,}10)] =$$

$$= 1 - 0{,}8159 - 1 + 0{,}8643 = 0{,}8643 - 0{,}8159 = \underline{0{,}0484}.$$

****