FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto. El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante: A) La energía cinética. B) El momento angular. C) El momento lineal.

C.2. En un oscilador armónico se cumple que: A) La velocidad v y la elongación x son máximas simultáneamente. B) El período de oscilación T depende de la amplitud A. C) La energía total E se cuadriplica cuando se duplica la frecuencia.

C.3. Si un núcleo atómico emite una partícula α y dos partículas β, su número atómico Z y másico A: A) Z aumenta en dos unidades y A disminuye en dos. B) Z no varía y A disminuye en cuatro. C) Z disminuye en dos y A no varía.

C.4. Se dispone de un péndulo simple de 1,5 m de longitud. Se mide en el laboratorio el tiempo de 3 series de 10 oscilaciones obteniendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. ¿Cuál es el valor de g con su incertidumbre?

P.1. Tres cargas de +3 μC están situadas equidistantes entre sí sobre una circunferencia de radio 2 m. Calcula: a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia. b) El vector campo eléctrico en el mismo punto. c) El trabajo para traer una carga q' = 1 μC desde el infinito al centro de la circunferencia. (Dato: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻²).

P.2. Un objeto de 3 cm se sitúa a 20 cm de una lente cuya distancia focal es 10 cm: a) Dibuja la marcha de los rayos si la lente es convergente. b) Dibuja la marcha de los rayos si la lente es divergente. c) En ambos casos calcula la posición y el tamaño de la imagen.

OPCIÓN B

C.1. Dos esferas de radio R con cargas $+Q$ y $-Q$, tienen sus centros separados una distancia d. A una distancia $d/2$ (siendo $d/2 >> R$); se cumple: A) El potencial es cero y el campo electrostático $4\,k\,Q\,d^{-2}$. B) El potencial es cero y el campo electrostático $8\,k\,Q\,d^{-2}$. C) El potencial es $4\,k\,Q\,d^{-1}$ y el campo cero.

C.2. La ecuación de una onda es $y = 0{,}02$ sen $(50\,t - 3\,x)$; esto significa que: A) $\omega = 50$ rad·s⁻¹ y $\lambda = 3$ m. B) La velocidad de propagación $u = 16{,}67$ m·s⁻¹ y la frecuencia $f = 7{,}96$ s⁻¹. C) $T = 50$ s y el número de onda $k = 3$ m⁻¹.

C.3. Si un espejo forma una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto, se trata de un espejo: A) Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el centro de la curvatura. B) Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el espejo. C) Convexo con el objeto en cualquier posición.

C.4. En la determinación de la constante elástica de un resorte podemos utilizar dos tipos de procedimientos. En ambos casos, se obtiene una recta a partir de la cual se calcula la constante elástica. Explica cómo se determina el valor de la constante a partir de dicha gráfica para cada uno de los dos procedimientos, indicando qué tipo de magnitudes hay que representar en los ejes de abscisas y de ordenadas.

P.1. Una muestra de carbono 14 tiene una actividad de $2{,}8\cdot10^8$ desintegraciones·s⁻¹; el período de semidesintegración es T = 5 730 años, calcula: a) La masa de la muestra en el instante inicial. b) La actividad al cabo de 2 000 años. c) La masa de muestra en ese instante. (Datos: $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ mol⁻¹; masa atómica del ^{14}C = 14 g·mol⁻¹; 1 año = $3{,}16\cdot10^7$ s).

P.2. Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla: a) El campo gravitatorio en la Luna. b) La velocidad de escape en la Luna. c) El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s. (Datos: $g_{0T} = 9{,}8$ m·s⁻²; $R_L = 1{,}7\cdot10^6$ m).

Soluciones

OPCIÓN A

C.1. En el movimiento de los planetas en órbitas elípticas y planas alrededor del Sol se mantiene constante:

A) La energía cinética.
B) El momento angular.
C) El momento lineal.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

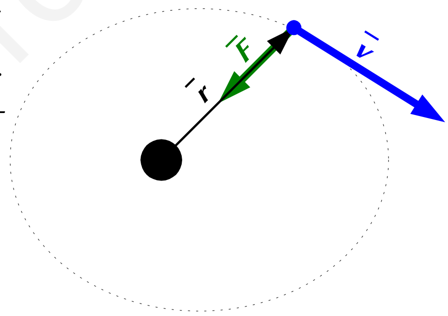
El campo gravitatorio es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
El momento angular $\overline{\boldsymbol{L}}_O$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ respecto a un punto O que se toma como origen es:

$$\overline{\boldsymbol{L}}_O = \overline{\boldsymbol{r}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para estudiar su variación, derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\boldsymbol{r}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mathrm{d}(m\cdot\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}=\vec{\boldsymbol{v}}\times m\cdot\vec{\boldsymbol{v}}+\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}=\vec{\boldsymbol{0}}+\vec{\boldsymbol{0}}=\vec{\boldsymbol{0}}$$

El primer sumando da el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero) porque la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ y el momento lineal $m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$ son paralelos. El segundo sumando también da el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ porque, al ser el campo de fuerzas un campo central, el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ con origen en el punto origen del campo y el vector fuerza (dirigido hacia ese origen) son vectores paralelos.



$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot m \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$|\overline{\boldsymbol{r}} \times \overline{\boldsymbol{F}}| = |\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{F}}| \cdot \operatorname{sen} 180° = 0$$

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, el momento angular respecto al punto origen de la fuerza es un vector constante, ya que su derivada es cero.

Las otras opciones:
A. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
El campo gravitatorio es un campo de fuerzas conservativo, ya que es un campo de fuerzas centrales, en las que la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre un planeta tiene la misma dirección (y sentido contrario) que el vector de posición del planeta colocando el origen de coordenadas en el Sol.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$$

Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C. Falsa. El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como se dijo en el apartado A, la rapidez varía con la posición del planeta. Además, la dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C.2. En un oscilador armónico se cumple que:

A) La velocidad v y la elongación x son máximas simultáneamente.

B) El período de oscilación T depende de la amplitud A.

C) La energía total E se cuadriplica cuando se duplica la frecuencia.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: C

La fuerza recuperadora es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica valdrá lo mismo para cualquier elongación: es constante.

$$E = (E_c + E_p) = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ k \cdot A^2$$

Para el punto de equilibrio:

$$E = E_c + E_p = ½\ m \cdot v^2_m + ½\ k \cdot 0^2 = ½\ m \cdot v^2_m$$

$$E = ½\ m \cdot v^2_m$$

Por definición, un objeto realiza un movimiento armónico simple cuando la aceleración recuperadora es proporcional a la separación de la posición de equilibrio.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

Esto es equivalente a decir que la ecuación de movimiento es de tipo senoidal o cosenoidal.

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Derivando.

La velocidad es máxima cuando $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 1$

$$v_m = A \cdot \omega$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con la frecuencia f por la expresión

$$\omega = 2\ \pi \cdot f$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía total

$$E = ½\ m \cdot v^2_m = m \cdot (A \cdot 2\ \pi\ f)^2 / 2 = 2\ \pi^2\ m \cdot A^2 \cdot f^2$$

Es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia. Si la frecuencia se hace el doble, la energía total se cuadriplica.

Las otras opciones:

A: Falsa. Como se ha dicho antes, la velocidad es máxima cuando el coseno de la fase es 1 ($\varphi = 0$ ó $\varphi = \pi$).
La expresión de la elongación muestra que es máxima cuando el seno de la fase es 1 ($\varphi = \pi/2$ ó $\varphi = 3\ \pi/2$)

B: Falsa. La fuerza recuperadora elástica es:

$$F = -k \cdot x$$

Si solo actúa esta fuerza elástica, por la 2ª ley de Newton:

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

Para obtener la expresión de la aceleración se deriva la expresión de la velocidad:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)\}}{\mathrm{d}\,t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

Queda

$$k = m \cdot \omega^2$$

La pulsación o fase angular, ω está relacionada con el período T por la expresión

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sustituyendo queda

$$k = m \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

Despejando el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El período depende de la masa y de la constante elástica del resorte, pero no de la amplitud.

C.3. Si un núcleo atómico emite una partícula α y dos partículas β, su número atómico Z y másico A:

A) Z aumenta en dos unidades y A disminuye en dos.

B) Z no varía y A disminuye en cuatro.

C) Z disminuye en dos y A no varía.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

Las propiedades del núcleo resultante después de una emisión alfa o beta pueden deducirse por la naturaleza de estas radiaciones y las leyes de conservación del número másico y de la carga eléctrica en los procesos nucleares.

Una partícula alfa es un núcleo de helio-4 ($\alpha = {}^4_2\text{He}$) y una partícula beta(-) es un electrón ($\beta^- = {}^{\ 0}_{-1}\text{e}$)

Escribiendo las reacciones del enunciado y aplicando las leyes de conservación mencionadas

$${}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2\,{}^{\ 0}_{-1}\text{e} + {}^{A-4}_{\ \ Z}\text{Y}$$

C.4. Se dispone de un péndulo simple de 1,5 m de longitud. Se mide en el laboratorio el tiempo de 3 series de 10 oscilaciones obteniendo 24,56 s, 24,58 s, 24,55 s. ¿Cuál es el valor de g con su incertidumbre?

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

Como solo hay datos para una longitud de péndulo solo se puede calcular el valor medio del período y aplicar la ecuación del período del péndulo:

Experiencia	1	2	3
Tiempo(s) empleado en 10 oscilaciones	24,56	24,58	24,55
Período	2,456	2,458	2,455

El valor medio del período es:

$$T = \frac{\sum T_i}{N} = \frac{7{,}369\ [\text{s}]}{3} = 2{,}456\ \text{s}$$

El valor de la aceleración g de la gravedad calculado de la ecuación del período del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g = 4\pi^2\frac{L}{T^2} = 4\pi^2\frac{1{,}5\ [\text{m}]}{(2{,}456\ [\text{s}])^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

El cálculo de incertidumbres se limita al uso apropiado de las cifras significativas. Como la longitud del péndulo sólo tiene 2 cifras:

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\ \text{m/s}^2$$

Análisis: No es muy coherente dar la medida de los tiempos con 4 cifras significativas y la longitud de péndulo con solo 2.

P.1. Tres cargas de +3 µC están situadas equidistantes entre sí sobre una circunferencia de radio 2 m. Calcula:
a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia.
b) El vector campo eléctrico en el mismo punto.
c) El trabajo para traer una carga q' = 1 µC desde el infinito al centro de la circunferencia.
Dato $K = 9\cdot10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$. *(P.A.U. Jun. 12)*
Rta.: a) $V = 4{,}05\cdot10^4$ V; b) $\overline{\boldsymbol{E}}_\text{O} = \overline{\mathbf{0}}$; c) $W_\text{ext} = 4{,}05\cdot10^{-2}$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de cada carga	$Q = 3{,}00\ \mu\text{C} = 3{,}00\cdot10^{-6}$ C
Radio de la circunferencia	$R = 2{,}00$ m
Valor de la carga que se traslada	$q = -1{,}00\ \mu\text{C} = 1{,}00\cdot10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Potencial electrostático en el centro de la circunferencia	V_O
Intensidad del campo electrostático en el centro de la circunferencia	$\overline{\boldsymbol{E}}_\text{O}$
Trabajo para trasladar una carga de 1 µC desde el infinito al centro	$W_{\infty\rightarrow\text{O}}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_AB
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{\boldsymbol{F}} = K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$
Principio de superposición	$\vec{\boldsymbol{F}}_\text{A} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{A}i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{\text{A}\rightarrow\text{B}} = q\,(V_\text{A} - V_\text{B})$

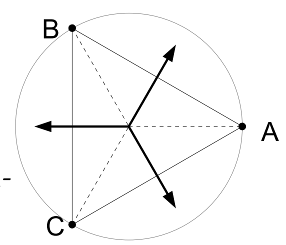
Solución:

a) Los potenciales en el centro O de la circunferencia debidos a cada carga son iguales porque tanto las cargas como las distancias al centro son iguales. Valen:

$$V_{\text{C}\rightarrow\text{O}} = V_{\text{B}\rightarrow\text{O}} = V_{\text{A}\rightarrow\text{O}} = V = 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{3{,}00\cdot10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])} = 1{,}35\cdot10^4\ \text{V}$$

El potencial electrostático de un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_\text{O} = V_{\text{A}\rightarrow\text{O}} + V_{\text{B}\rightarrow\text{O}} + V_{\text{C}\rightarrow\text{O}} = 3\cdot V = 3\cdot 1{,}35\cdot10^4\ [\text{V}] = 4{,}05\cdot10^4\ \text{V}$$



b) Se hace un dibujo con los vectores intensidad de campo electrostático creado por cada carga y la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.
Al ser iguales las tres cargas y estar a la misma distancia del centro de la circunferencia, los tres vectores intensidad de campo electrostático son simétricos y su resultante es nula:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_\text{O} = \overline{\mathbf{0}}$$

Si quieres realizar los cálculos:
La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto A es:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{A}\rightarrow\text{O}} = 9{,}00\cdot10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{3{,}00\cdot10^{-6}\ [\text{C}]}{(2{,}00\ [\text{m}])^2}(-\vec{\mathbf{i}}) = -6{,}75\cdot10^3\,\vec{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_{B\to O}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^{2}\cdot C^{-2}}]\frac{3{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(2{,}00\ [\mathrm{m}])^{2}}(\cos(-60°)\,\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{sen}(-60°)\,\vec{\mathbf{j}})=(3{,}38\cdot 10^{3}\,\vec{\mathbf{i}}-5{,}85\cdot 10^{3}\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, la intensidad de campo electrostático en el centro O de la circunferencia, debida a la carga de 3 µC situada en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = 3{,}38{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por el principio de superposición, la intensidad de campo electrostático resultante en el punto O es la suma vectorial de las intensidades de campo de cada carga:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{O} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to O} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to O} = (-6{,}75{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{i}}) + (3{,}38{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{i}} - 5{,}85{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{j}}) + (3{,}38{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}85{\cdot}10^{3}\ \bar{\mathbf{j}}) = 0\ \bar{\mathbf{i}} + 0\ \bar{\mathbf{j}}$$

c) El trabajo que hace la fuerza del campo es

$$W_{\infty\to O} = q\,(V_{\infty} - V_{O}) = 1{,}00{\cdot}10^{-6}\ [\mathrm{C}]\cdot(0 - 4{,}05{\cdot}10^{4})\ [\mathrm{V}] = -4{,}05{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Suponiendo que salga y llegue con velocidad nula, el trabajo que hay que hacer es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 4{,}05{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{J}$$

P.2. Un objeto de 3 cm se sitúa a 20 cm de una lente cuya distancia focal es 10 cm:

a) Dibuja la marcha de los rayos si la lente es convergente.
b) Dibuja la marcha de los rayos si la lente es divergente.
c) En ambos casos calcula la posición y el tamaño de la imagen.

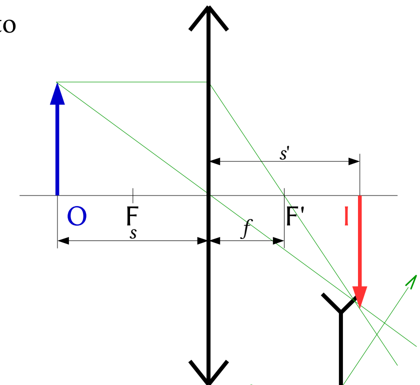
(P.A.U. Jun. 12)

Rta.: c) (c) $s_1' = 0{,}20$ m; $y_1' = -3{,}0$ cm; (d) $s_2' = -0{,}067$ m; $y_2' = 1{,}0$ cm.

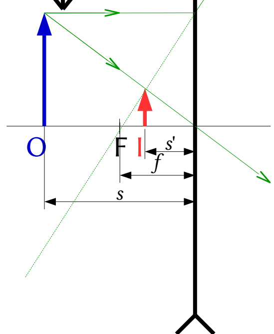
Datos (convenio de signos DIN)	***Cifras significativas: 2***
Tamaño del objeto	$y = 3{,}0$ cm $= 0{,}030$ m
Posición del objeto	$s = -20$ cm $= -0{,}20$ m
Distancia focal de la lente	$f = 10$ cm $= 0{,}10$ m
Incógnitas	
Posición de la imagen en ambas lentes	s_1', s_2'
Tamaño de la imagen en ambas lentes	y_1', y_2'
Ecuaciones	
Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes	$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$
Aumento lateral en las lentes	$A_L=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}$

Solución:

a) En el dibujo se representa el objeto O antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:
- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que el rayo refractado pasa por el foco F′.
- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.
El punto de corte es el correspondiente a la imagen I.
Análisis: La imagen es real ya que s′ es positiva, es decir a la derecha de la lente que es la zona donde se forman las imágenes reales en las lentes. El signo negativo del tamaño nos indica que la imagen es invertida. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.



b) En el dibujo, como los rayos no se cortan, se prolongan hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen I.



Análisis: La imagen es virtual ya que s´ es negativa, es decir a la izquierda de la lente que es la zona donde se forman las imágenes virtuales en las lentes. El signo positivo del tamaño nos indica que la imagen es derecha. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.

c) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda de la lente tienen signo negativo. Para la lente convergente, f = +0,10 m.
Se usa la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{-0{,}20\ [\mathrm{m}]}=\frac{1}{0{,}10\ [\mathrm{m}]}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = 0{,}20\ \mathrm{m}$$

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_{\mathrm{L}}=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\quad =\frac{y'}{0{,}030\ [\mathrm{m}]}=\frac{0{,}20\ [\mathrm{m}]}{-0{,}20\ [\mathrm{m}]}=-1$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_{\mathrm{L}} \cdot y = -1{,}0 \cdot 0{,}030\ \mathrm{m} = -0{,}030\ \mathrm{m} = -3{,}0\ \mathrm{cm}$$

Para la lente divergente, f = −0,10 m.

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{-0{,}20\ [\mathrm{m}]}=\frac{1}{-0{,}10\ [\mathrm{m}]}$$

$$s' = -0{,}067\ \mathrm{m}$$

$$\frac{y'}{0{,}030\ [\mathrm{m}]}=\frac{-0{,}067\ [\mathrm{m}]}{-0{,}20\ [\mathrm{m}]}$$

$$y' = 0{,}010\ \mathrm{m} = 1{,}0\ \mathrm{cm}$$

OPCIÓN B

C.1.- Dos esferas de radio R con cargas $+Q$ y $-Q$, tienen sus centros separados una distancia d. A una distancia $d/2$ (siendo $d/2 >> R$); se cumple:
- A) El potencial es cero y el campo electrostático $4\ k\ Q\ d^{-2}$.
- B) El potencial es cero y el campo electrostático $8\ k\ Q\ d^{-2}$.
- C) El potencial es $4\ k\ Q\ d^{-1}$ y el campo cero.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

Si $d/2 \gg R$, las esferas pueden considerarse como cargas puntuales.
El potencial en un punto debido a dos cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales que cada carga crea en ese punto sin ser afectada por la presencia de la otra.
El potencial V electrostático en un punto creado por una carga Q puntual (o esférica) situada a una distancia R es:

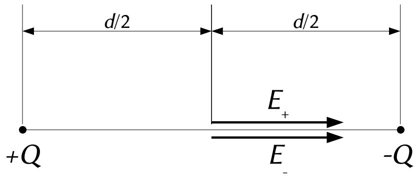
$$V=K\frac{Q}{R}$$

Donde K es la constante electrostática.
Por tanto el potencial electrostático en el punto medio creado por ambas cargas es cero:

$$V=V_{+}+V_{-}=K\frac{+Q}{d/2}+K\frac{-Q}{d/2}=0$$

Por el principio de superposición, la intensidad del campo electrostático en un punto creado por un conjunto de cargas puntuales es la suma vectorial de las intensidades de campo electrostático debidas a cada una de ellas como si el resto de las cargas no estuviese presente.
La expresión de la intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ del campo electrostático creado por una carga Q puntual en un punto a una distancia r

$$\vec{\boldsymbol{E}}=K\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{u}}_r$$



Siendo $\overline{\boldsymbol{u}}_r$ el vector unitario en la dirección del punto tomando como origen la carga.
Por el principio de superposición

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\vec{\boldsymbol{E}}_+ +\vec{\boldsymbol{E}}_- =K\frac{+Q}{(d/2)^2}\vec{\mathbf{i}}+K\frac{-Q}{(d/2)^2}(-\vec{\mathbf{i}})=2\left(4K\frac{Q}{d^2}\right)\vec{\mathbf{i}}=8K\frac{Q}{d^2}\vec{\mathbf{i}}$$

$$|\vec{\boldsymbol{E}}|=8K\frac{Q}{d^2}$$

C.2. La ecuación de una onda es y = 0,02 sen (50 t – 3 x); esto significa que:
A) ω = 50 rad·s⁻¹ y λ = 3 m.
B) La velocidad de propagación u = 16,67 m·s⁻¹ y la frecuencia f = 7,96 s⁻¹.
C) T = 50 s y el número de onda k = 3 m⁻¹.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: B

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
La velocidad u de propagación de una onda es $u = \lambda \cdot f$
Comparando la ecuación general con la del problema obtenemos:
A = 0,02 m
ω = 50 rad/s
k = 3 rad/m

Para elegir la opción correcta calculamos algunos de los parámetros de la ecuación (usando 2 cifras significativas)

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\,[\text{rad}]}{3{,}0\,[\text{rad/m}]}=2{,}1\text{ m}$$

Eso nos permite descartar la opción A.

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{50\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]}=8{,}0\text{ s}^{-1}=8{,}0\text{ Hz}$$

$$u = \lambda \cdot f = 2{,}1\,[\text{m}] \cdot 8{,}0\,[\text{s}^{-1}] = 17\text{ m/s}$$

Coincide con la opción B (si redondeamos los valores que aparecen en dicha opción a las cifras significativas que hay que usar)
La opción C no es correcta porque la frecuencia es la inversa del período:

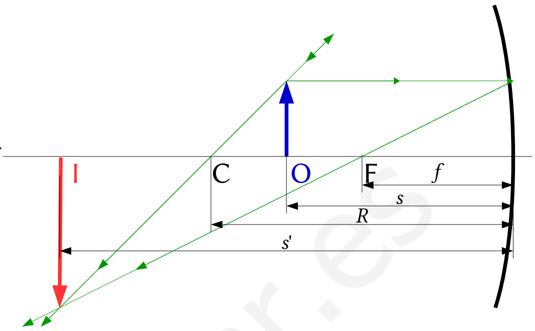
$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{8,0\ [\mathrm{s}^{-1}]}=0{,}13\ \mathrm{s}$$

C.3. Si un espejo forma una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto, se trata de un espejo:
A) Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el centro de la curvatura.
B) Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el espejo.
C) Convexo con el objeto en cualquier posición.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: A

En los espejos convexos el tamaño de la imagen es siempre menor. Habrá que usar un espejo cóncavo y situar el objeto entre el centro de curvatura y el foco tal como se ve en la figura.



C.4. En la determinación de la constante elástica de un resorte podemos utilizar dos tipos de procedimientos. En ambos casos, se obtiene una recta a partir de la cual se calcula la constante elástica. Explica cómo se determina el valor de la constante a partir de dicha gráfica para cada uno de los dos procedimientos, indicando qué tipo de magnitudes hay que representar en los ejes de abscisas y de ordenadas.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

En la que F es la fuerza peso, y x el alargamiento producido.
Si x se representa en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será igual al inverso de la constante elástica del resorte:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta x / \Delta F = 1 / k$$

El valor de la constante será el inverso de la pendiente del estudio estático.

En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω^2

$$k=m\cdot\omega^2=\frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \frac{\Delta m}{\Delta T^2}=\frac{k}{4\pi^2}$$

El valor de la constante será $4\,\pi^2$ veces la pendiente del estudio dinámico.

$$k = 4\,\pi^2\, p_d$$

P.1. Una muestra de carbono 14 tiene una actividad de $2{,}8\cdot10^8$ desintegraciones·s^{-1}; el período de semidesintegración es T = 5730 años, calcula:
a) La masa de la muestra en el instante inicial.
b) La actividad al cabo de 2000 años.
c) La masa de muestra en ese instante.

Datos: N_A = 6,02·10²³ mol⁻¹; masa atómica del ¹⁴C = 14 g·mol⁻¹; 1 año = 3,16·10⁷ s. *(P.A.U. Jun. 12)*
Rta.: a) m_0 = 1,7 mg; b) A = 2,2·10⁸ Bq; c) m = 1,3 mg.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período de semidesintegración	$T_{½}$ = 5 730 años = 1,81·10¹¹ s
Actividad de la muestra	A_0 = 2,80·10⁸ Bq
Tiempo para calcular la actividad	t = 2000 años = 6,31·10¹⁰ s
Masa atómica del ¹⁴C	M = 14,0 g/mol
Número de Avogadro	N_A = 6,02·10²³ mol⁻¹
Incógnitas	
Masa inicial de la muestra	m_0
Actividad radiactiva a los 2000 años	A
Masa de la muestra a los 2000 años	m
Otros símbolos	
Constante de desintegración radiactiva	λ
Ecuaciones	
Ley de la desintegración radiactiva	$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ $\lambda = \ln (N_0 / N) / t$
Cuando $t = T_{½}$, $N = N_0 / 2$	$T_{½} = \ln 2 / \lambda$
Actividad radiactiva	$A = -\mathrm{d}\, N / \mathrm{d}\, t = \lambda \cdot N$

Solución:

a) Se puede calcular el número de átomos N a partir de la expresión de la actividad radiactiva: $A = \lambda \cdot N$. Antes hay que calcular la constante λ de desintegración radiactiva, a partir del período de semidesintegración

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{1{,}81 \cdot 10^{11}\ [\mathrm{s}]} = 3{,}83 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}000\,175\ \text{año}^{-1}$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{2{,}80 \cdot 10^8\ [\mathrm{Bq}]}{3{,}83 \cdot 10^{-12}\ [\mathrm{s}^{-1}]} = 7{,}30 \cdot 10^{19}\ \text{átomos}$$

La masa es proporcional a la cantidad de átomos:

$$m_0 = \frac{N_0}{N_A} \cdot M = \frac{7{,}30 \cdot 10^{19}\ [\text{átomos}]}{6{,}02 \cdot 10^{23}\ [\text{átomos/mol}]} \cdot 14{,}0\ [\mathrm{g/mol}] = 1{,}70 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g} = 1{,}70\ \mathrm{mg}$$

b) Como la actividad radiactiva es proporcional a la cantidad de núcleos, $A = \lambda \cdot N$, se puede obtener una expresión similar a la ley de la desintegración radiactiva, $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, en la que aparece la actividad en vez de la cantidad de átomos:

$$\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1{,}00 \cdot 10^7\ [\mathrm{Bq}] \cdot e^{-0{,}000175\ [\text{año}]^{-1} \cdot 2000\ [\text{año}]} = 2{,}20 \cdot 10^8\ \mathrm{Bq}$$

c) Como la masa también es proporcional a la cantidad de núcleos se puede obtener una expresión similar a la ley de la desintegración radiactiva, $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, en la que aparece la masa en vez de la cantidad de átomos. La constante de proporcionalidad es: N_A / M, el número de átomos que hay en la unidad de masa de ese elemento, donde N_A es el número de Avogadro y M es la masa atómica del elemento.

$$N = m \cdot N_A / M$$

$$m \cdot \frac{\cancel{N_A}}{\cancel{M}} = m_0 \cdot \frac{\cancel{N_A}}{\cancel{M}} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 1{,}70\ [\mathrm{mg}] \cdot e^{-0{,}000175\ [\text{año}]^{-1} \cdot 2000\ [\text{año}]} = 1{,}33\ \mathrm{mg}$$

P.2. Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 el terrestre, halla:
a) El campo gravitatorio en la Luna.
b) La velocidad de escape en la Luna.

c) El período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es 2 s.
Datos: g_{0T} = 9,8 m·s⁻²; R_L = 1,7·10⁶ m. *(P.A.U. Jun. 12)*
Rta.: a) g_L = 1,6 m/s²; b) $v_{e\,L}$ = 2,3 km/s; c) T_L = 4,9 s.

Datos	***Cifras significativas: 2***
Relación entre las masas de la Luna y de la Tierra	$M_L/M_T = 0{,}012$
Relación entre los radios de la Luna y de la Tierra	$R_L/R_T = 0{,}27$
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_T = 9{,}8\ \text{m/s}^2$
Radio de la Luna	$R_L = 1{,}7\cdot10^6\ \text{m}$
Período del péndulo en la Tierra	$T_T = 2{,}0\ \text{s}$
Incógnitas	
Campo gravitatorio en la Luna	g_L
Velocidad de escape en la Luna	$v_{e\,L}$
Período de oscilación en la luna de un péndulo cuyo T_T = 2 s	T_L
Otros símbolos	
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Peso de un objeto	$P = m \cdot g$
Energía cinética de un objeto de masa m que se mueve a la velocidad v	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria de una objeto de masa m situado a una distancia r del centro de un astro de masa M (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$
Período de un péndulo simple de longitud L en un punto donde la aceleración de la gravedad es g	$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Solución:

a) El peso de un objeto cerca de la superficie de la Tierra es la fuerza con la que la Tierra lo atrae:

$$m\,g_T=G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

Análogamente, el peso de un objeto cerca de la superficie de la Luna es la fuerza con la que lo atrae:

$$m\,g_L=G\frac{M_L\,m}{R_L^2}$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, queda:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_T}{\cancel{m}\cdot g_L}=\frac{\cancel{G}\frac{M_T\cdot\cancel{m}}{R_T^2}}{\cancel{G}\frac{M_L\cdot\cancel{m}}{R_L^2}}$$

$$\frac{g_L}{g_T}=\frac{M_L/M_T}{(R_L/R_T)^2}=\frac{0{,}012}{0{,}27^2}=0{,}16$$

Despejando

$$g_L = 0{,}16 \cdot 9{,}8\ [\text{m/s}^2] = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

Análisis: El resultado es razonable, porque sabemos que la gravedad en la superficie de la Luna es unas 6 veces menor que en la superficie de la Tierra.

b) La velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un objeto en reposo sobre la superficie de la Luna para que llegue a una distancia «infinita» del centro de la Luna.
Despreciando las interacciones de los demás objetos celestes y teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Luna y el infinito.

$$(E_c + E_p)_L = (E_c + E_p)_\infty$$

Al ser la velocidad de escape una velocidad mínima, se toma que el objeto llega al infinito con velocidad nula. Como el origen de energía potencial gravitatoria está en el infinito, la energía potencial gravitatoria de un objeto en el infinito es nula.

$$\frac{1}{2} m\, v_{e\,L}^2 + \left(-G \frac{M_L\, m}{R_L}\right) = 0$$

Despejando la velocidad de escape $v_{e\,L}$

$$v_{e\,L} = \sqrt{2\,G \frac{M_L}{R_L}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Luna, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Luna, el peso de un cuerpo $m \cdot g_0$ es igual a la fuerza gravitatoria

$$\cancel{m}\, g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

La velocidad de escape en la Luna quedaría:

$$v_{e\,L} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\,g_L\,R_L^2}{R_L}} = \sqrt{2\,g_L\,R_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6\ [\mathrm{m/s^2}] \cdot 1{,}7 \cdot 10^6\ [\mathrm{m}]} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = 2{,}3\ \mathrm{km/s}$$

c) El período T de un péndulo de longitud L en un lugar donde la gravedad sea g viene dado por la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dividiendo las expresiones correspondientes a la Tierra y la Luna

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{\cancel{2\pi} \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2\pi} \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}6}} = 2{,}5$$

Sustituyendo el dato $T_T = 2{,}0$ s

$$T_L = 2{,}5 \cdot 2{,}0\ [\mathrm{s}] = 4{,}9\ \mathrm{s}$$

Análisis: El resultado es razonable. La gravedad en la superficie de la Luna es menor que en la superficie de la Tierra, y cuanto más pequeña, más lentamente se mueve el péndulo y mayor es su período.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Actualizado: 11/02/22