

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO****JULIO – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: i) La capacidad del depósito es de 10 litros; ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo $\frac{2}{3}$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; iii) un litro de gasolina cuesta 1 euro y uno de queroseno 0,5 euros, siendo 8 euros el límite de gasto total. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litro de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones i), ii) y iii).

b) La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

a)

Sean x e y el número de litros de gasolina y queroseno que se utilizan, respectivamente.

$$\text{Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x \geq \frac{2}{3}y \\ y \geq 0 \\ x + 0,5y \leq 8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 3x - 2y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \end{array} \right\}.$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	10	0
y	0	10

$$\textcircled{2} \Rightarrow 3x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{3x}{2} \Rightarrow P(2,0) \rightarrow Si.$$

x	0	4
y	0	6

$$\textcircled{3} \Rightarrow 2x + y \leq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	8	4
y	0	8

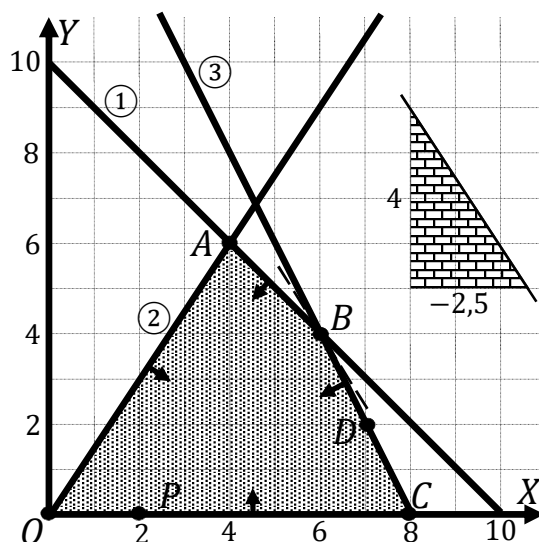
La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x = 20; x = 4; y = 6 \Rightarrow A(4, 6).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -10 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 6; y = 4 \Rightarrow B(6, 4).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C(8, 0).$$



b)

La función de objetivos es la siguiente: $F(G, K) = 8G + 5K$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(4, 6) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 32 + 30 = 62.$$

$$B \Rightarrow f(6, 4) = 8 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 48 + 20 = 68.$$

$$C \Rightarrow f(8, 0) = 8 \cdot 8 + 5 \cdot 0 = 64 + 0 = 64.$$

El máximo se produce en el punto $B(6, 4)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(6, 4)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$F(G, K) = 8g + 5k = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x = -\frac{4}{2,5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{2,5}.$$

La distancia recorrida es máxima con 6 litros de gasolina y 4 de keroseno.

La distancia máxima recorrida es de 68 kilómetros.

2º) Dada la función $h(x) = a + Lx - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0,01 \leq x \leq 3$, donde la función Lx represente el logaritmo neperiano de x . Responder:

a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?

b) Dada la función $f(x) = 4 + Lx - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo anterior, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $f'(x) = 0$).

a)

$$h(1) = a + L1 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = a + 0 - 6 + 2 = a - 4.$$

$$h(1) = -1 \Rightarrow a - 4 = -1 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

b)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 6 + 4x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 6 + 4x = 0; \quad 1 - 6x + 4x^2 = 0; \quad 4x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 4.$$

$$f''\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)^2} + 4 = -\frac{16}{9 - 6\sqrt{5} + 5} + 4 = -\frac{16}{14 - 6\sqrt{5}} + 4 = \frac{56 - 24\sqrt{5} - 16}{14 - 6\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{40 - 24\sqrt{5}}{14 - 6\sqrt{5}} \cong \frac{-13,67}{0,58} < 0 \Rightarrow \text{Máximo local para } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \cong 0,19.$$

$$f(0,19) \cong 4 + L0,19 - 6 \cdot 0,19 + 2 \cdot 0,19^2 = 4 - 1,66 - 1,15 + 0,07 = 1,26.$$

Máximo: $P(0,19; 1,26)$.

$$f''\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} + 4 = -\frac{16}{9 + 6\sqrt{5} + 5} + 4 = -\frac{16}{14 + 6\sqrt{5}} + 4 = \frac{56 + 24\sqrt{5} - 16}{14 + 6\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{40+24\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo local para } x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \cong 1,31.$$

$$f(1,31) \cong 4 + L1,31 - 6 \cdot 1,31 + 2 \cdot 1,31^2 = 4 + 0,27 - 7,86 + 3,43 = \\ = 7,70 - 7,86 = -0,16.$$

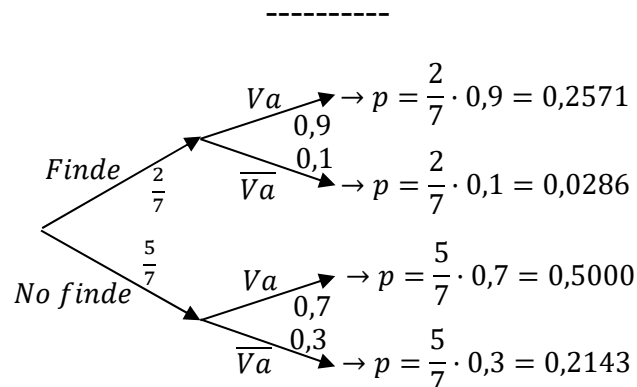
Mínimo: $Q(1,31; -0,16)$.

3º) Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90 % de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70 %. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

a) Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?

b) Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?

c) Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?



a)

$$P = P(\text{Fin} \cap \overline{Va}) = P(\text{Fin}) \cdot P(\overline{Va}/\text{Fin}) = \frac{2}{7} \cdot 0,1 = \underline{0,0286}.$$

b)

$$\begin{aligned} P(Va) &= P(\text{Fin} \cap Va) + P(\overline{\text{Fin}} \cap Va) = \\ &= P(\text{Fin}) \cdot P(Va/\text{Fin}) + P(\overline{\text{Fin}}) \cdot P(Va/\overline{\text{Fin}}) = \frac{2}{7} \cdot 0,9 + \frac{5}{7} \cdot 0,7 = \\ &= 0,2571 + 0,5000 = \underline{0,7571}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P &= P(\text{Fin}/Va) = \frac{P(\text{Fin} \cap Va)}{P(Va)} = \frac{P(\text{Fin}) \cdot P(Va/\text{Fin})}{P(\text{Fin}) \cdot P(Va/\text{Fin}) + P(\overline{\text{Fin}}) \cdot P(Va/\overline{\text{Fin}})} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0,9}{\frac{2}{7} \cdot 0,9 + \frac{5}{7} \cdot 0,7} = \\ &= \frac{0,2571}{0,2571 + 0,5000} = \frac{0,2571}{0,7571} = \underline{0,3396}. \end{aligned}$$

4º) En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entra la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

a) El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94 %.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea $\leq 0,02$, con un nivel de confianza del 94 %?

a)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$$
$$1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$$

$$\text{Datos: } p = \frac{175}{500} = 0,35; \quad q = 0,65; \quad n = 500; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p , q y n , es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right).$

$$\left(0,35 - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}}; 0,35 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}} \right);$$

$$(0,35 - 1,88 \cdot 0,0213; 0,35 + 1,88 \cdot 0,0213); (0,35 - 0,0401; 0,35 + 0,0401).$$

$$\underline{I.C._{94\%} = (0,3099; 0,3901)}.$$

b)

$$\text{Datos: } \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}} = 0,0213; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88; \quad E = 0,02.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{1,88}{0,02} \right)^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65 =$$

$$= 8.836 \cdot 0,2275 = 2.010,19.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 2.011 peces.

OPCIÓN B

1º) a) Calcular los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \text{ y } K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Determinar el exponente n de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para que se cumpla que $A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}$.

a)

$$F \cdot G = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2-2a+2b-4 & 1+a-b-3+d \\ -4-2b+4 & 2+b+3-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+2b-6 & a-b+d-2 \\ -2b & b-d+5 \end{pmatrix}.$$

$$H \cdot K = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a+4-6 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix}.$$

$$F \cdot G = H \cdot K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2a+2b-6 & a-b+d-2 \\ -2b & b-d+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a-2-2b & 4a-2 \\ -c-2b & 2c-6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a+2b-6 = -2a-2-2b \\ -2b = -c-2b \\ a-b+d-2 = 4a-2 \\ b-d+5 = 2c-6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4b = 4 \\ c = 0 \\ 3a+b-d = 0 \\ b-2c-d = -11 \end{array} \Rightarrow b = 1; c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a+1-d = 0 \\ 1-0-d = -11 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 12; 3a+1-12 = 0; 3a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{3}.$$

$$\underline{\text{Solución: } a = \frac{11}{3}, b = 1, c = 0, d = 12.}$$

b)

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{11} & 0 \\ 0 & -2^{11} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^{11} & 0 \\ 0 & (-2)^{11} \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)^{11} \cdot I = A^n. \quad (1)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.$$

$$(A^2)^{\frac{n}{2}} = (-2I)^{\frac{n}{2}}; \quad A^n = (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot (I)^{\frac{n}{2}} = (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot I = A^n. \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2):

$$(-2)^{11} \cdot I = (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot I \Rightarrow \frac{n}{2} = 11 \Rightarrow \underline{n = 22}.$$

2º) La función $f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x$ mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número $x \geq 1$ de antenas instaladas:

a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.

b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

a)

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2. \quad f''(x) = 98 \cdot \frac{-2x}{x^4} = -\frac{196}{x^3}.$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{98}{x^2} - 2 = 0; \quad 2x^2 = 98; \quad x^2 = 49 \Rightarrow x_1 = -7, x_2 = 7.$$

Como tiene que ser $x \geq 1$, la solución es $x = 7$.

$$f''(7) = -\frac{196}{7^3} < 0 \Rightarrow \text{Justificación de que se trata de un máximo relativo.}$$

El máximo beneficio se alcanza instalando 7 antenas.

b)

$$f(x) = 0 \Rightarrow 100 - \frac{98}{x} - 2x = 0; \quad 100x - 98 - 2x^2 = 0; \quad x^2 - 50x + 49 = 0;$$

$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2.304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = 25 \pm 24 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 49.$$

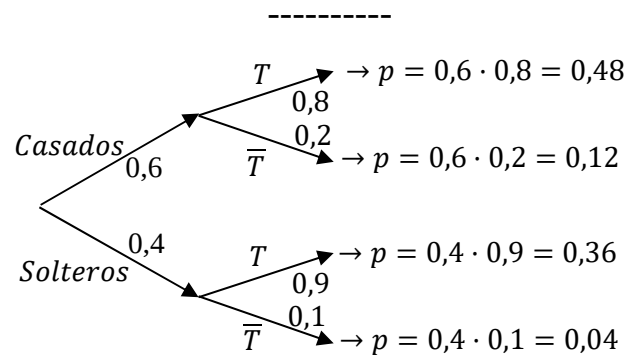
Por ser la función $f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x$ continua en su dominio y presentar un máximo local para $x = 7$:

El beneficio es positivo para $1 < x < 49$.

3º) De un grupo de personas sabemos que el 60 % están casadas. Entre las personas casadas, el 80 % tiene trabajo y, por el otro lado, el 10 % de las personas solteras está en paro.

a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?

b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?



a)

$$P = P(C/T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(C) \cdot P(T/C)}{P(C) \cdot P(T/C) + P(S) \cdot P(T/S)} = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9} = \frac{0,48}{0,48 + 0,36} = \frac{0,48}{0,84} = \underline{0,5714}.$$

b)

$$P = P(C/\bar{T}) = \frac{P(C \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(C) \cdot P(\bar{T}/C)}{1 - P(T)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{1 - 0,84} = \frac{0,12}{0,16} = \underline{0,75}.$$

4º) Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza (188,18; 208,82) para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99 %. Calcular:

a) La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.

b) El error máximo cometido en la estimación de la media μ , si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n = 500$ y el nivel de confianza es del 96 % .

a)

$$\bar{x} = \frac{208,82+188,18}{2} = \frac{397}{2} = \underline{198,5}.$$

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,575.$$

$$1 - 0,015 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$E = \frac{208,82-188,18}{2} = \frac{28,64}{2} = 14,32.$$

$$\text{Datos: } \sigma = 75; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575; \quad E = 14,32.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{75}{14,32} \right)^2 =$$

$$= (2,575 \cdot 5,2374)^2 = 13,49^2 = 181,88.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 182 televidentes.

b)

Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$$1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$$

$$\text{Datos: } n = 500; \quad \sigma = 75; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} = 2,055 \cdot 3,3541 = 6,893.$$

El error máximo cometido es de 6,89 segundos.
