PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivada e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

OPCIÓN A

1º) Sea la región definida por las inecuaciones: $x+y-1\geq 0; 0\leq x\leq 4; 0\leq y\leq 2$. Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x,y)=4x+2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

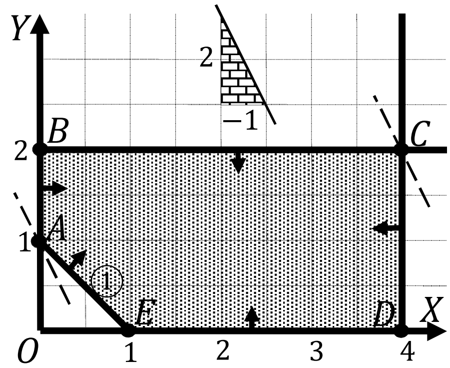
$a)$

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\geq 1 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 2 \end{array}\right\}.$

(1) $\Rightarrow x+y\geq 1 \Rightarrow y\geq 1-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	1	0
y	0	1

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,1).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,4).$ $C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow C(4,2).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(4,0).$ $E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow E(1,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $F(x,y)=4x+2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,1) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0 + 8 = 8.$

$C \Rightarrow f(4,2) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16 + 4 = 20.$

$D \Rightarrow f(4,0) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 16 + 0 = 16.$

$E \Rightarrow f(1,0) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 4 + 0 = 4.$

El máximo se produce en el punto $C(4,2)$ y el mínimo en el punto $A(0,1)$.

También se hubieran obtenido los puntos C y A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{2}x = -\frac{2}{1} \Rightarrow m = -\frac{2}{1}.$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ C(4,2)\ y\ el\ mínimo\ en\ A(0,1).}$$

$$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ 20\ y\ el\ mínimo, 2.}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Encontrar los valores de los parámetros a, b y c para que la función pase por el punto $O(0,0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $P(2,-4)$.

b) Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

----

a)

Por pasar por $O(0,0)$ es $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

Por pasar por $P(2,-4)$ es $f(2) = -4$:

$f(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = -4;\ \ 8 + 4a + 2b = -4;\ \ 4a + 2b = -12;$

$2a + b = -6.$ (1)

Por tener $f(x)$ un extremo relativo en $P(2,-4)$ $es\ f'(2) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0;\ \ 12 + 4a + b = 0;\ \ 4a + b = -12.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las expresiones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2a - b = 6 \\ 4a + b = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = -6;\ \underline{a = -3}.$$

$2 \cdot (-3) + b = -6;\ -6 + b = -6 \Rightarrow \underline{b = 0}$.

El polinomio resulta:

$$\underline{f(x) = x^3 - 3x^2}.$$

b)

$f'(x) = 3x^2 - 6x;\ \ f''(x) = 6x - 6;\ \ f'''(x) = -6.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0;\ \ 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máx.\ \ O(0,0)}.$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4 \Rightarrow \underline{Mín.\ A(2, -4)}.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0;\ \ 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1.$

$f'''(x) \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 1.$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \underline{P.I.:\ B(1, -2)}.$

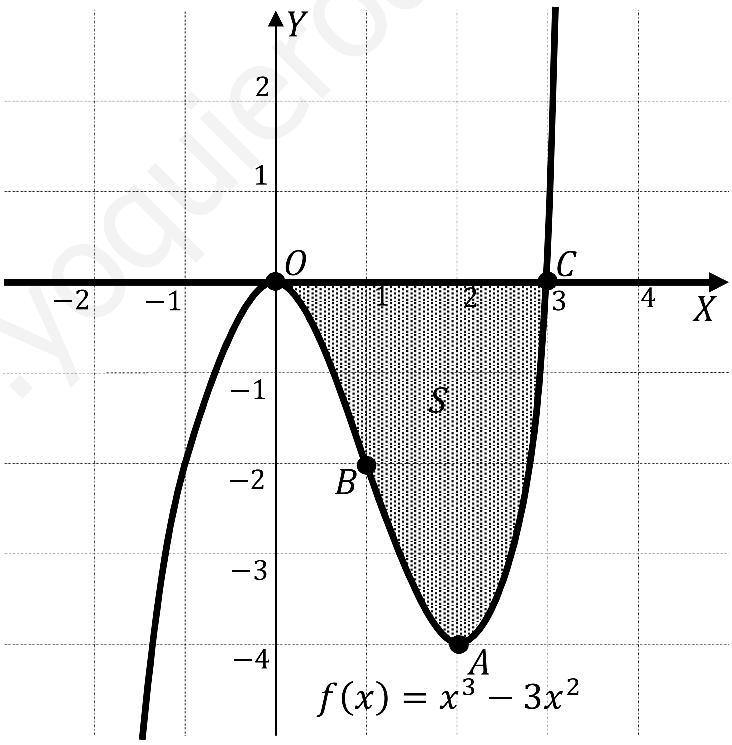
$c)$

La función corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0;\ \ x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow C(3, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función se indica en la figura adjunta.

Por ser negativas todas las ordenadas de la función en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, su valor es el siguiente:

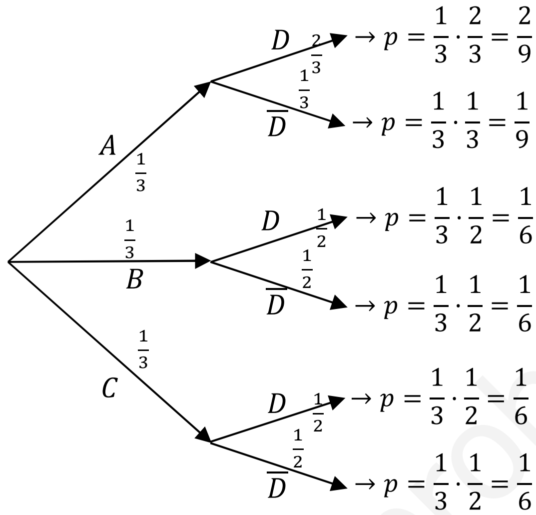


$$S = \int_3^0 f(x) \cdot dx = \int_3^0 (x^3 - 3x^2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3}\right]_3^0 = 0 - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3 \cdot 3^3}{3}\right) =$$

$$= -\frac{81}{4} + 27 = \frac{108 - 81}{4} = \underline{\frac{27}{4}\ u^2 = 6{,}75\ u^2}.$$

****

3º) En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes. Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?



$$P = P\left(A/\overline{D}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(A)\cdot P\left(\overline{D}/A\right)}{P(A)\cdot P\left(\overline{D}/B\right)+P(B)\cdot P\left(\overline{D}/B\right)+P(C)\cdot P\left(\overline{D}/C\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

****

4º) Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante. ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

$Datos$: $\mu = 68;\ \sigma = 18.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(68, 18).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-68}{18}$.

Primer grupo: (20 % de la población, baja cultura general).

$P = P(X \leq \alpha) = 0{,}2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha-68}{18}\right) = 0{,}2.$

Por ser la probabilidad menor de 0,5 la expresión $\frac{\alpha-68}{18}$ es negativa, por lo cual:

$P\left(Z \leq \frac{\alpha-68}{18} = y\right) = 0{,}2 \Rightarrow -y = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, a 0,8 le corresponde, aproximadamente 0,84, por lo cual:

$$-\frac{\alpha-68}{18} = 0{,}84;\ -\alpha + 68 = 15{,}12 \Rightarrow \alpha = 68 - 15{,}12 = 53{,}88$$

$$\underline{El\ 20\ \%\ de\ la\ poblacion\ ha\ sacado\ menos\ de\ 53{,}88\ puntos.}$$

Tercer grupo: (15 % de la población, excelente cultura general, por lo cual, el 85 % está por debajo en cultura).

$P\left(Z \leq \frac{\beta-68}{18} = z\right) = 0{,}85 \Rightarrow z = 0{,}85$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, a 0,85 le corresponde, aproximadamente 1,04, por lo cual:

$$\frac{\beta-68}{18} = 1{,}04;\ \ \beta - 68 = 18{,}72 \Rightarrow \beta = 68 + 18{,}72 = 86{,}72$$

$$\underline{El\ 15\ \%\ de\ la\ poblacion\ ha\ sacado\ más\ de\ 86{,}72\ puntos.}$$

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{El\ 65\ \%\ de\ la\ poblacion\ ha\ sacado\ entre\ 53{,}88\ y\ 86{,}72\ puntos.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz inversa de $A-B$.

b) Hallar la matriz X tal que $X(A-B)=2A-3B$.

----

a)

$$A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\ (A-B)^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ Adj.de\ (A-B)^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}=\frac{Adj.de\ (A-B)^t}{|A-B|}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\underline{(A-B)^{-1}=\frac{Adj.de\ (A-B)^t}{|A-B|}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.}$$

b)

$$X\cdot(A-B)=2A-3B;\quad X\cdot(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=(2A-3B)\cdot(A-B)^{-1};.$$

$$X\cdot I=(2A-3B)\cdot(A-B)^{-1}\Rightarrow \underline{(2A-3B)\cdot(A-B)^{-1}}.$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -6\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X=(2A-3B)\cdot(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\underline{X=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}.}$$

****

2º) Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4\ \ y\ \ g(x) = 3x^2$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.

b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.

c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 4x^3$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

Nota: el caso que nos ocupa es especial, pues la segunda derivada también se anula para el valor que anula la primera derivada. En este caso se sigue derivando de forma sucesiva; si la última derivada distinta de cero es impar se trata de un punto de inflexión para el valor que anula la primera derivada; si es par y positiva se trata de un mínimo y si es par y negativa, de un máximo.

$f''(x) = 12x^2$. $\quad f'''(x) = 24x$. $\quad f^{IV}(x) = 24 > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ x = 0$.

$f(0) = -4$.

$$\underline{Máximo\ relativo: A(0, -4)}.$$

La función $f(x)$ no tiene puntos de inflexión (ver nota).

La función $g(x) = 3x^2$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, su vértice es $\underline{O(0, 0), que\ es\ un\ mínimo}$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$\underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, 0).}$

$\underline{Crecimiento: x \in (0, +\infty).}$

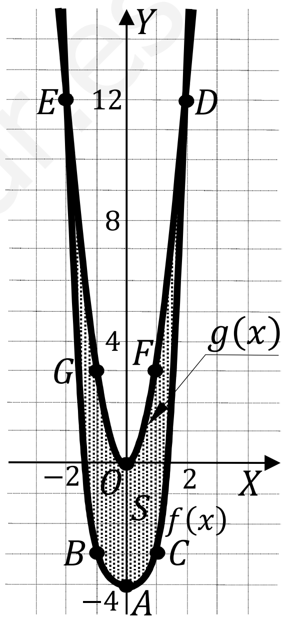
$b)$

Las dos funciones son pares, o sea: simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Son puntos de $f(x) = x^4 - 4 \Rightarrow B(1, -3), C(-1, -3), D(2, 12)\ y\ E(-2, 12)$.

Son puntos de $g(x) = 3x^2 \Rightarrow F(1, 3), G(-1, 3), D(2, 12)\ y\ E(-2, 12)$.

Los puntos de intersección de dos curvas tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2;\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0;$$

$$x^2 = b;\ b^2 - 3b - 4 = 0;\ \ b = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = -1, b_2 = 4.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x \notin R;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to E(-2, 12) \\ x_2 = 2 \to D(2, 12) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximad, es la de la figura adjunta.

$c)$

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [3x^2 - (x^4 - 4)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (-x^4 + 3x^2 + 4) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{5} + x^3 + 4x\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^5}{5} + 2^3 + 4 \cdot 2\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{32}{5} + 8 + 8\right) = 2 \cdot \left(-\frac{32}{5} + 16\right) =$$

$$= 32 - \frac{64}{5} = \frac{160 - 64}{5} = \frac{96}{5}.$$

$$\underline{S = \frac{96}{5}\ u^2 = 19{,}2\ u^2.}$$

****

3º) En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es del 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres. Se elige una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?

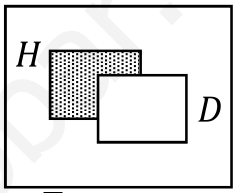
b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?

c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

$Datos$: $P(M \cap D) = 0{,}06$; $P(H \cap \overline{D}) = 0{,}37$; $P(M) = 0{,}54$.

a)

$$P = P(D) = P(M \cap D) + P(H \cap D).$$



$H \cap \overline{D} = H - (H \cup D)$

$$P(H \cap \overline{D}) = P(H) - P(H \cup D) \Rightarrow$$

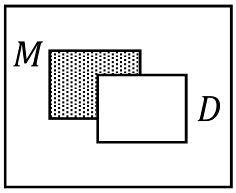
$$\Rightarrow P(H \cup D) = P(H) - P(H \cap \overline{D}) = 1 - P(M) - P(H \cap \overline{D}) = 1 - 0{,}54 - 0{,}37 =$$

$$= 1 - 0{,}91 = 0{,}09.$$

$$P = P(M \cap D) + P(H \cap D) = 0{,}06 + 0{,}09 = \underline{0{,}15}.$$

b)

$$P = P(\overline{D}/M) = \frac{P(M \cap \overline{D})}{P(M)}. \quad (*)$$



$M \cap \overline{D} = M - (M \cup D)$

$$P(M \cap \overline{D}) = P(M) - P(M \cap D).$$

Sustituyendo en (*): $P = \frac{P(M \cap \overline{D})}{P(M)} = \frac{P(M) - P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{0{,}54 - 0{,}06}{0{,}54} = \frac{0{,}48}{0{,}54} = \underline{0{,}8889}$.

c)

$$P = P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}06}{0{,}15} = \underline{0{,}4}.$$

****

4º) La nota de Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5. Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

$Carrera\ A: Datos:\ \mu = 6{,}8;\ \sigma = 0{,}6.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(6{,}8;\ 0{,}6).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}8}{0{,}6}$.

$P = P(X \leq A) = 0{,}25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{A-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25.$

Por ser la probabilidad menor de 0,5 la expresión $\frac{A-6{,}8}{0{,}6}$ es negativa, por lo cual:

$P\left(Z \leq \frac{A-6{,}8}{0{,}6} = y\right) = 0{,}25 \Rightarrow -y = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, a 0,75 le corresponde, aproximadamente 0,675, por lo cual:

$$-\frac{A-6{,}8}{0{,}6} = 0{,}675;\ -A + 6{,}8 = 0{,}405 \Rightarrow A = 6{,}8 - 0{,}405 = \underline{6{,}395}.$$

$Carrera\ B: Datos:\ \mu = 7;\ \sigma = 0{,}5.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(7;\ 0{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-7}{0{,}5}$.

$P = P(X \leq B) = 0{,}25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{B-7}{0{,}5}\right) = 0{,}25.$

Por ser la probabilidad menor de 0,5 la expresión $\frac{B-7}{0{,}5}$ es negativa, por lo cual:

$P\left(Z \leq \frac{B-7}{0{,}5} = t\right) = 0{,}25 \Rightarrow -t = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, a 0,75 le corresponde, aproximadamente 0,675, por lo cual:

$$-\frac{B-7}{0{,}5} = 0{,}675;\ -B + 7 = 0{,}3375 \Rightarrow B = 7 - 0{,}3375 = \underline{6{,}6652}.$$

$$\underline{Como\ se\ aprecia, es\ necesaria\ una\ nota\ mínima\ en\ la\ carrera\ A}$$

****