PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Ese examen tiene ocho ejercicios. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, que resuelvan ecuaciones, que hagan operaciones con matrices, que calculen determinantes, que resuelvan integrales o que almacenen datos alfanuméricos.

1º) Se considera la ecuación $A \cdot X = A^t \cdot B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) Resuelve la ecuación matricial.

----

a)

Por ser A una matriz cuadrada, su matriz traspuesta tiene la misma dimensión, por lo cual la dimensión de X tiene que ser la misma que la de B.

$$\underline{La\ matriz\ X\ debe\ de\ tener\ por\ dimensión\ 3 \times 1}.$$

b)

$$A \cdot X = A^t \cdot B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 5F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & si\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$:

a) Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

c) Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

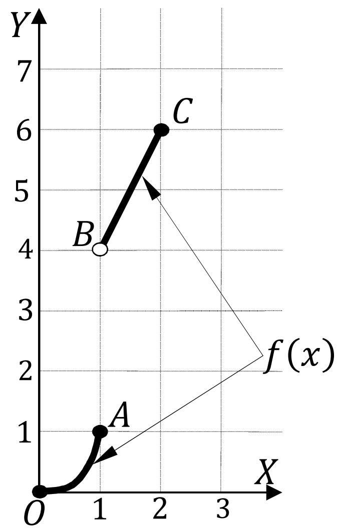
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax + 2) = a + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = a + 2 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

b)

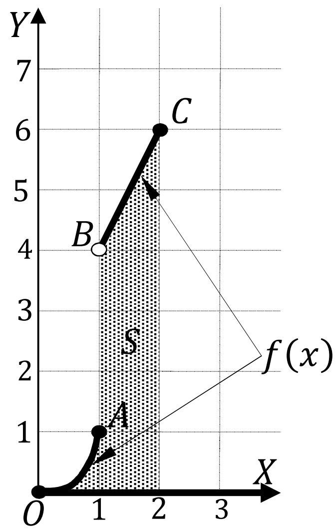
Para $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2 & si\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$.



La representación gráfica de la función es la que se indica en el gráfico.

La función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito para $x = 1$.

$c)$



Se supone que la superficie que se pide calcular es la sombreada de la figura, que es ¡abierta!, en fin, que la pregunta es manifiestamente mejorable.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es las siguiente:

$$S = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 (2x+2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} - 0 + [x^2 + 2x]_1^2 = \frac{1}{3} + (2^2 + 2 \cdot 2) - (1^2 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} + 4 + 4 - 1 - 2 =$$

$$= \frac{1}{3} + 5 = \frac{1+15}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16}{3}\ u^2 \cong 5{,}33\ u^2.}$$

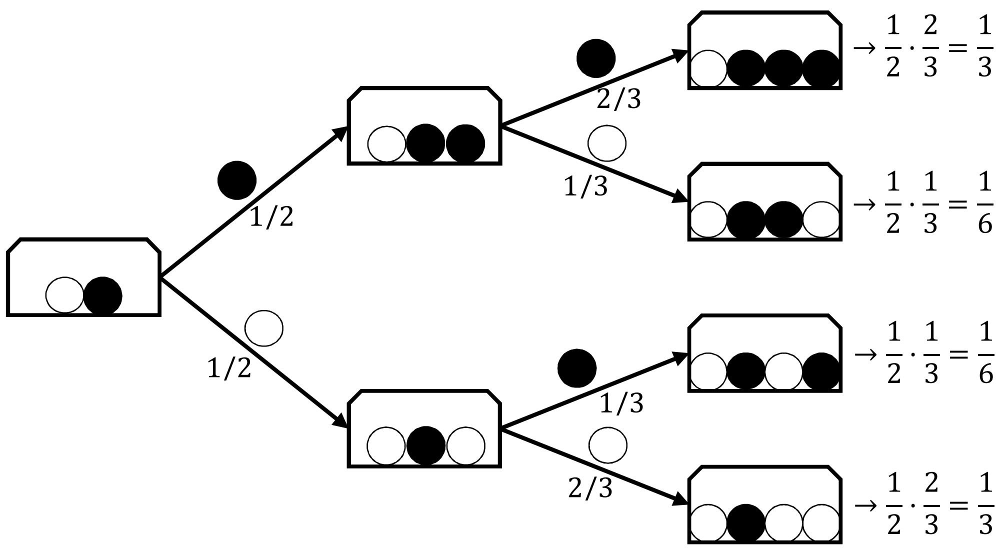
****

3º) En una caja hay una bola blanca y una bola negra. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca si la primera que se ha sacado era negra.

b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

c) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca?



a)

Si la primera bola ha sido blanca, la urna termina con una bola negra y dos bolas blancas. Por la regla de Laplace:

$$P = \frac{csos\ favorables}{casos\ posibles} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}3333.}$$

b)

$$P = P(N) = P(BN) + P(NN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5.}$$

c)

$$P = P(B/N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}3333.}$$

****

4º) La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

b) Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

----

a)

$Datos\text{: } \mu = 163; \;\; \sigma = 7.$

$X \to N(\mu;\, \sigma) = N(163, 7).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-163}{7}$.

$$P = P(X > 171) = P\left(Z > \frac{171-163}{7}\right) = P\left(Z > \frac{8}{7}\right) = P(Z > 1{,}14) =$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}14) = 1 - 0{,}8729 = \underline{0{,}1271}.$$

$$P = P(155 \leq X \leq 171) = P\left(\frac{155-163}{7} \leq Z \leq \frac{171-163}{7}\right) = P\left(\frac{-8}{7} \leq Z \leq \frac{8}{7}\right) =$$

$$= P(-1{,}14 \leq Z \leq 1{,}14) = P(Z < 1{,}14) - [1 - P(Z < 1{,}14)] =$$

$$= P(Z < 1{,}14) - 1 + P(Z < 1{,}14) = 2 \cdot P(Z < 1{,}14) - 1 = 2 \cdot 0{,}8729 - 1 =$$

$$= 1{,}7458 - 1 = \underline{0{,}7458}.$$

b)

En primer lugar determinamos β tal que:

$$P = P(X < \beta) = 0{,}25 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\beta-163}{7}\right) = 0{,}25.$$

Como el valor 0,25 no está en la tabla $N(0, 1)$ se hace lo siguiente:

$$P\left(Z < -\frac{-\beta+163}{7}\right) = P\left(Z \geq \frac{-\beta+163}{7}\right) = 0{,}25;\;\; P\left(Z \leq \frac{-\beta+163}{7}\right) = 1 - 0{,}25;$$

$P\left(Z \leq \frac{-\beta+163}{7}\right) = 0{,}75$. Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0,75 le corresponde, aproximadamente, 0,675:

$$\frac{-\beta+163}{7} = 0{,}675;\; -\beta + 163 = 4{,}725;\;\; \beta = 163 - 4{,}725 = 158{,}275.$$

El valor del 50 % coincide con el valor de la media: $\mu = 163$.

Ahora determinamos γ tal que:

$P = P(X < \gamma) = 0{,}75 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\beta - 163}{7}\right) = 0{,}75$.

Ya se vio que 0,75 le corresponde en la tabla $N(0, 1)$, aproximadamente, 0,675:

$\frac{\beta - 163}{7} = 0{,}675;\ \beta - 163 = 4{,}725;\ \ \beta = 163 + 4{,}725 = 167{,}275$.

$\underline{\textit{Los cortes de las medidas son}: 158{,}28\ cm; 163\ cm\ y\ 167{,}28\ cm.}$

****

5º) Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo. Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

La empresa A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 euros cada paquete.

La empresa B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 euros cada paquete.

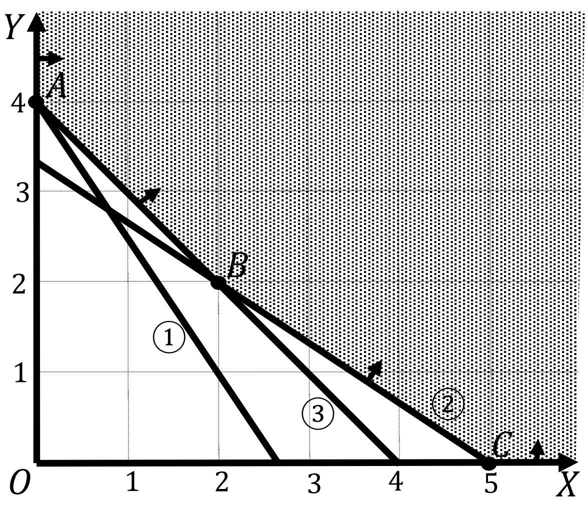
¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Sean x e y el número de paquetes que el guía de turismo adquiere de las empresas A y B, respectivamente.

Las restricciones que se deducen son: $\left.\begin{array}{r} 6x+4y\geq 16 \\ 4x+6y\geq 20 \\ 4x+4y\geq 16 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+2y\geq 8 \\ 2x+3y\geq 10 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+2y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,4).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=10 \\ -2x-2y=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(2,2).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+3y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(5,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=210x+230y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,4)=210\cdot 0+230\cdot 4=0+920=920.$

$B \Rightarrow f(2,2)=210\cdot 2+230\cdot 2=420+460=880.$

$C \Rightarrow f(5,0)=210\cdot 5+230\cdot 0=1.050+0=1.050.$

El valor máximo se produce en el punto $B(2, 2)$.

$$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ comprando\ dos\ paquetes\ a\ cada\ empresa}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 880\ euros}.$$

****

6º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.

d) Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

----

a)

Por ser $1 + x^2 \neq 0, \forall x \in R$, el dominio de la función es $D(f) = R$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0;\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Como quiera que $(x^2 + 1)^2 > 0, \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $1 - x^2$.

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow |1 - x^2| < 0 \Rightarrow x \in (-1, 1).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow |1 - x^2| > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot [2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x]}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+1) - 4x \cdot (1-x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{8} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)}.$

$f''(1) = \frac{2-6}{8} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Máximo: Q\left(1, \frac{1}{2}\right)}.$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

$$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

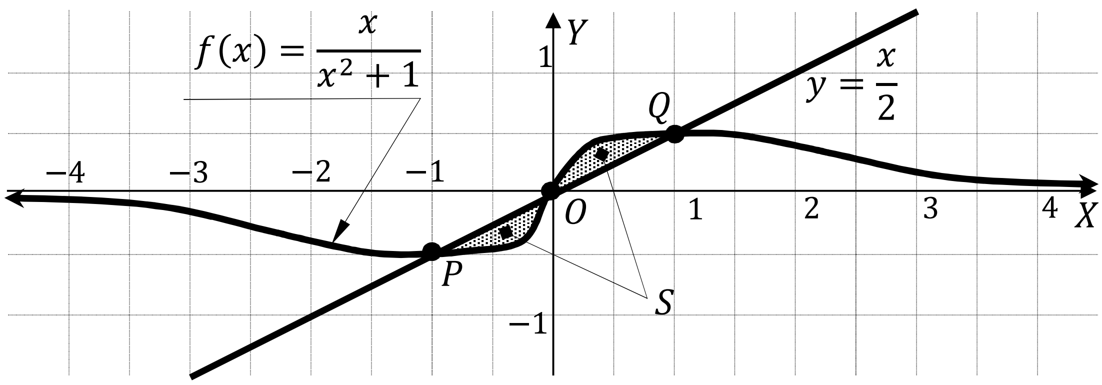
Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

c)

Los puntos de corte de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ y la recta $y = \frac{x}{2}$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{2};\ \ 2x = x^3 + x;\ \ x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \to P\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \\ x_2 = 0 \to O(0,0) \\ x_3 = 1 \to Q\left(1, \frac{1}{2}\right) \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación se expresa, aproximadamente, en la figura adjunta.

De la observación de la figura y teniendo en cuenta que, tanto la función como la recta, son simétricas con respecto al origen, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2} \right) \cdot dx.$

Se resuelve previamente la integral indefinida:

$A = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2} = B - \frac{x}{2}.$

$B = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \int B \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + 1 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt =$

$= \frac{1}{2} \cdot Lt + C = \frac{1}{2} \cdot L(x^2 + 1) + C.$

$\int A \cdot dx = \int B\, dx - \int \frac{x}{2} \cdot dx = \int B\, dx - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{1}{2} L(x^2 + 1) - \frac{x^2}{4} + C =$

$= \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot L(x^2 + 1) - x^2] + C.$

$S = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2} \right) \cdot dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot L(x^2 + 1) - x^2]_0^1 =$

$= \frac{1}{2} [2 \cdot L(1^2 + 1) - 1^2] - \frac{1}{2} [2 \cdot L(0^2 + 1) - 0^2] = \frac{1}{2} \cdot (2L2 - 1) - \frac{1}{2} \cdot (2L1 - 0) =$

$= L2 - \frac{1}{2}.$

$$\underline{S = \left(L2 - \frac{1}{2} \right) u^2 \cong 0{,}193\, u^2.}$$

$d)$

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L(x^2 + 1) + C.$

$F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot L(0^2 + 1) + C = 1;\ \ \frac{1}{2} \cdot L1 + C = 1;\ \ \frac{1}{2} \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{2} \cdot L(x^2 + 1) + 1.}$$

****

7º) Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

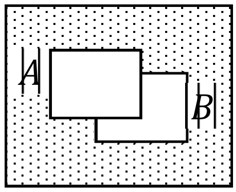
$a)$ $P(A \cup B)$. $b)$ $P(A^c \cap B^c)$. $c)$ $P(A^c \cap B)$. $d)$ $P(A/B)$.

$a)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}4 = \underline{0{,}7}.$$

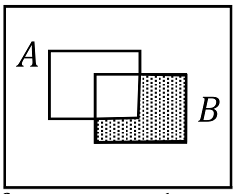
$b)$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3}.$$



$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

$c)$



$A^c \cap B = A - (A \cap B)$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 = \underline{0{,}1}$$

$d)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \underline{0{,}8}.$$

****

8º) El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) ¿Cuál debe ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para el consumo?

b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6.000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

----

a)

$Datos$: $\mu = 250$; $\sigma = 50$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(250, 50)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-250}{50}$

Se debe hallar γ tal que:

$$P = P(X > \gamma) = 0{,}4 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\gamma-250}{50}\right) = 0{,}4.$$

Como el valor 0,4 no está en la tabla $N(0, 1)$ se hace lo siguiente:

$$P\left(Z > \frac{\gamma-250}{50}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\gamma-250}{50}\right) = 0{,}4;\ \ P\left(Z \leq \frac{\gamma-250}{50}\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,6 le corresponde, aproximadamente, 0,255:

$$\frac{\gamma-250}{50} = 0{,}255;\ \gamma - 250 = 12{,}75;\ \ \gamma = 250 + 12{,}75 = 262{,}75.$$

$$\underline{El\ peso\ mínimo\ de\ las\ truchas\ es\ de\ 262{,}75\ gramos.}$$

b)

$$P(X > 280) = P\left(Z > \frac{280-250}{50}\right) = P\left(Z > \frac{30}{50}\right) = P(Z > 0{,}6) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743.$$

$$n = N \cdot p = 6.000 \cdot 0{,}2743 = 1.645{,}8.$$

$$\underline{Se\ podrán\ poner\ a\ la\ venta\ 1.645\ truchas.}$$

****