PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Ese examen tiene ocho problemas. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Obtener los valores de los parámetros $m\ y\ n$ para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

b) Para $m = 0\ y\ n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

c) Para $m = 0\ y\ n = 3$, resolver la ecuación matricial: $X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$.

----

a)

Para que una matriz no tenga inversa es necesario que se anule su determinante:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2n + m - 1 - n - 1 + 2m = 0;$$

$3m + n - 2 = 0;\ \ 3m + n = 2.$ (*)

$$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{m = -1}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de m en (*): $3 \cdot (-1) + n = 2 \Rightarrow \underline{n = 5}$.

b)

Para $m = 0\ y\ n = 3$ el módulo de la matriz A es: $|A| = 3 - 2 = 1$.

La matriz resulta ser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to 3 \cdot F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - \frac{4}{3}F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2;\; X \cdot A = A^2 - 2 \cdot I_3;\; X \cdot A \cdot A^{-1} = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1};$

$X \cdot I = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1}}.$

$$A^2 - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot I_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas. La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1.400 grises, y decide utilizar al menos 1.800 perlas rosas. Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

a) Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

b) ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

----

a)

Sean x e y el número de camisas de los tipos A y B que se fabrican en la empresa, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 20x + 10y \leq 900 \\ 20x + 20y \leq 1.400 \\ 30x + 60y \geq 1.800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 2x + y \leq 90 \Rightarrow y \leq 90 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	45
y	90	0

$② \Rightarrow x + y \leq 70 \Rightarrow y \leq 70 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	70
y	70	0

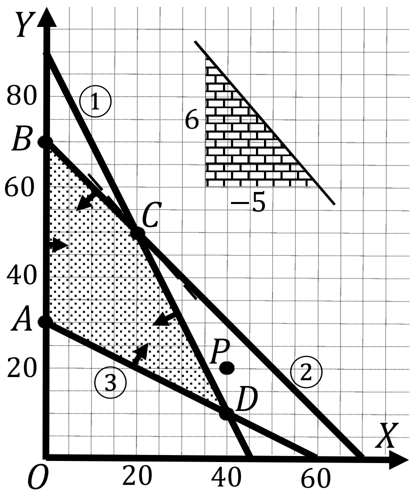
$③ \Rightarrow x + 2y \geq 60 \Rightarrow y \geq \frac{60-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	60	0
y	0	30

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 60x + 50y$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 60 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 30 \Rightarrow A(0, 30).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0, 70).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 90 \\ x + y = 70 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + y = 90 \\ -x - y = -70 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 20;$

$20 + y = 70 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow C(20, 50).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 90 \\ x + 2y = 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 180 \\ -x - 2y = -60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 120;\ \ x = 40;\ \ 40 + 2y = 60;$

$2y = 20; \;\; y = 10 \Rightarrow D(40, 10)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 30 = 0 + 1.500 = 1.500.$

$B \Rightarrow f(0, 70) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 70 = 0 + 3.500 = 3.500.$

$C \Rightarrow f(20, 50) = 60 \cdot 20 + 50 \cdot 50 = 1.200 + 2.500 = 3.700.$

$D \Rightarrow f(40, 10) = 60 \cdot 40 + 50 \cdot 10 = 2.400 + 500 = 2.900.$

El máximo se produce en el punto $C(20, 50)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 60x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{60}{50}x = -\frac{6}{5}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$

$\underline{Debe\ fabricar\ 20\ camisas\ tipo\ A\ y\ 50\ camisas\ tipo\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros.}$

$b)$

Como se observa en la figura, el punto $P(40, 20)$ no pertenece a la zona factible, por lo cual, la respuesta a la pregunta es no; no obstante se justifica por no satisfacerse todas las restricciones del enunciado.

$$P(40, 20) \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{c} 2 \cdot 40 + 20 \nleq 90 \\ 40 + 20 \leq 70 \\ 40 + 2 \cdot 20 \geq 60 \end{array}\right\}$$

$\underline{No\ es\ posible\ fabricar\ 40\ camisas\ tipo\ A\ y\ 20\ camisas\ tipo\ B.}$

****

3º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si \ \ x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$:

a) Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) En el caso $a = 1/2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

c) En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

d) Calcula $I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \, x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2) = 4 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(ax + \frac{2}{x}\right) = a + 2 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 4 = a + 2 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

b)

Para $a = 1/2$ y $x = 2$ la función resulta $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Para $x = 2$ es $f(2) = 1 + 1 = 2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(2, 2)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow m = f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2, 2)$ con $m = 0$ es:

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow \underline{La \ recta \ tangente \ es \ t \equiv y - 2 = 0}.$$

$c)$

En el caso $a = 2$ la función resulta ser $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si \ \ x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$.

Cuando $x < 1$ y con objeto del cálculo de los máximos, mínimos y puntos de inflexión se considera la función es $g(x) = x^3 + 3x^2$.

$g'(x) = 3x^2 + 6x$. $\qquad g''(x) = 6x + 6$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0; \ \ 3x(x+2) = 0; \ \ x_1 = -2, x_2 = 0$.

$g''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo \ relativo \ para \ x = -2$.

$g(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow Máx. \Rightarrow A(-2, 4)$.

$g''(0) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo \ relativo \ para \ x = 0$.

$g(0) = 0 \Rightarrow Mín. \Rightarrow O(0, 0)$.

$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0; \ \ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

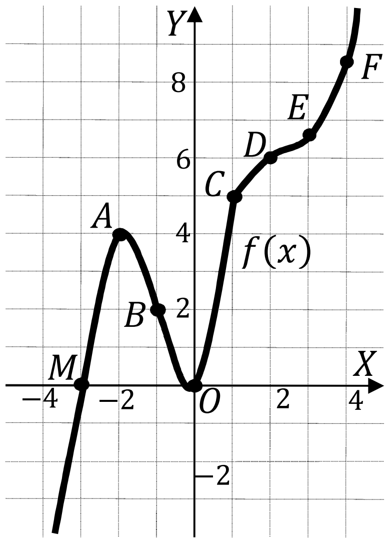
$g'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow Punto \ de \ inflexión \ para \ x = -1$.

$g(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -1 + 3 = 2 \Rightarrow P.I. \Rightarrow B(-1, 2)$.

Para $a = 2$ la función es continua en $x = 1$, por lo cual: $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 2 \cdot 1 + \frac{2}{1} = 4 \Rightarrow C(1, 4)$.

Otros puntos de la curva son los siguientes: $M(-3, 0); \ D(2, 5), E\left(3, \frac{20}{3}\right) \ y \ F\left(4, \frac{17}{2}\right)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.



$d)$

$I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx =$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + 2Lx - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + Lx^2 + \frac{4}{x} + C.}$$

****

4º) Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$:

a) Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $P(2, 5)$.

b) En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

c) En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

----

a)

Por contener al punto $P(2, 5) \Rightarrow f(2) = 5$:

$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 11 = 5;\ \ 8a + 2b = -6;\ \ 4a + b = -3.$ (1)

Por tener un extremo relativo en $P(2, 5) \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

$f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b = 0;\ \ 12a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 4a + b = -3 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -4a - b = 3 \\ 12a + b = 0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow 8a = 3 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{8}}.$$

$4 \cdot \frac{3}{8} + b = -3;\ \ \frac{3}{2} + b = -3;\ \ 3 + 2b = -6;\ \ 2b = -9 \Rightarrow \underline{b = -\frac{9}{2}}.$

b)

Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$ la función es $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2}.$ $\qquad f''(x) = \frac{9}{4}x.$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} = 0;\ x^2 - 4 = 0;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$f''(-2) = \frac{9}{4} \cdot (-2) = -\frac{9}{2} < 0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$$f(-2) = \frac{3}{8} \cdot (-2)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-2) + 11 =$$

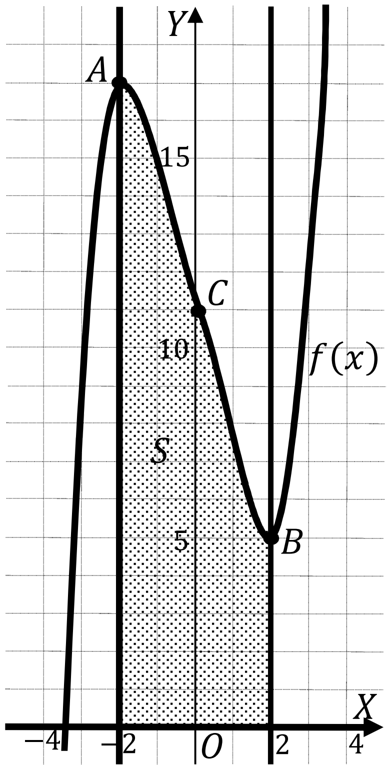
$= -3 + 20 = 17 \Rightarrow \underline{Máx.: A(-2, 17)}.$

$$f''(2) = \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{9}{2} > 0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$$f(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2 + 11 =$$

$= 3 - 9 + 11 = 5 \Rightarrow \underline{Mín.: B(2, 5)}.$



$c)$

Con los datos obtenidos en los apartados anteriores se puede hacer una representación gráfica, aproximada, de la función $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$, que es la que aparece en la figura adjunta.

$$S = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11\right) \cdot dx = \left[-\frac{3x^4}{32} - \frac{9x^2}{4} + 11x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{3 \cdot 2^4}{32} - \frac{9 \cdot 2^2}{4} + 11 \cdot 2\right) - \left[-\frac{3 \cdot (-2)^4}{32} - \frac{9 \cdot (-2)^2}{4} + 11 \cdot (-2)\right] =$$

$= (-3 - 9 + 22) - (-3 - 9 - 22) = 10 + 34 \Rightarrow \underline{S = 44\ u^2}.$

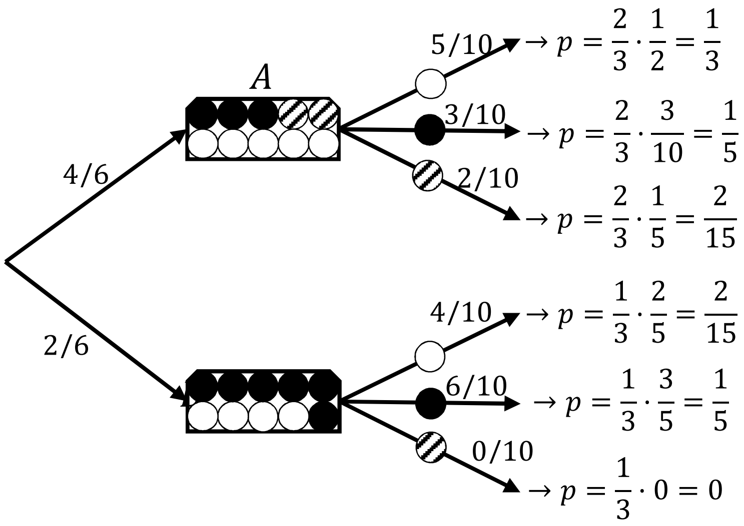
****

5º) Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición: la caja A contiene 5 blancas, 3 negras y 2 rayadas y la B, 4 blancas y 6 negras. Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y los otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?



a)

$$P = P(Bl) = P(A \cap Bl) + P(B \cap Bl) = P(A) \cdot P(Bl/A) + P(B) \cdot P(Bl/B) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5+2}{15} = \underline{\frac{7}{15} = 0{,}4667}.$$

b)

$$P = P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{15} + 0 = \underline{\frac{2}{15} = 0{,}1333}.$$

c)

$$P = P(B/Bl) = \frac{P(B \cap Bl)}{P(Bl)} = \frac{P(B) \cdot P(Bl/B)}{P(Bl)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{15}} = \underline{\frac{2}{7} = 0{,}2857}.$$

****

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A)=0{,}5;\ P(A\cup B)=0{,}7\ y\ P(A\cap B)=0{,}4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

b) Sabemos que $P(C)=0{,}4;\ P(D)=0{,}3\ y\ P(C\cup D)=0{,}5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

c) Sabemos que $P(E)=0{,}6;\ P(F)=0{,}8$, y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

----

a)

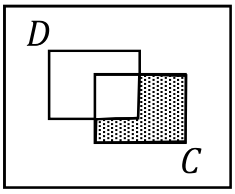
$Datos: P(A)=0{,}5;\ P(A\cup B)=0{,}7\ y\ P(A\cap B)=0{,}4.$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0{,}7-0{,}5+0{,}4\Rightarrow \underline{P(B)=0{,}6}.$

b)

$Datos: P(C)=0{,}4;\ P(D)=0{,}3\ y\ P(C\cup D)=0{,}5.$



$C\cap\overline{D}=C-(C\cap D)$

$P=P\left(C/\overline{D}\right)=\frac{P\left(C\cap\overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)}=\frac{P(C)-P(C\cap D)}{1-P(D)}.$ (*)

$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)\Rightarrow$

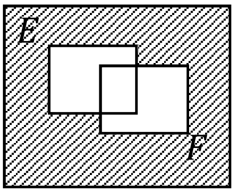
$\Rightarrow P(C\cap D)=P(C)+P(D)+P(C\cup D)=0{,}4+0{,}3-0{,}5=0{,}2.$

Sustituyendo el valor obtenido en (*):

$P=P\left(C/\overline{D}\right)=\frac{0{,}4-0{,}2}{1-0{,}3}=\frac{0{,}2}{0{,}7}=\underline{0{,}2857}.$

c)

Por ser sucesos independientes se cumple que:



$P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)=1-P(E\cup F)$

$P(E)\cdot P(F)=P(E\cap F)$, por lo cual:

$P(E\cap F)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48.$

$P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)=1-P(E\cup F)=1-[P(E)+P(F)-P(E\cap F)]=$

$=1-(0{,}6+0{,}8-0{,}48)=1-0{,}92=\underline{0{,}08}.$

****

7º) En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de madia 4,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

c) Si la desviación típica es 3,14 puntos ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

----

a)

$Datos: P(X < 4) = 0{,}4;\ \ \mu = 4{,}8.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} =.$

$P(X < 4) = 0{,}4 \Rightarrow P\left(Z < \frac{4-4{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}4;\ \ P\left(Z < \frac{-0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}4;$

$P\left(Z \geq \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}4;\ \ 1 - P\left(Z < \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}4;\ \ P\left(Z < \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}6.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,6 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}5984 --- 0{,}25 \\ 0{,}6026 --- 0{,}26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 42 --- 0{,}01 \\ 16 ---- x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}16}{42} = 0{,}004.$$

$\frac{0{,}8}{\sigma} = 0{,}254;\ \ \sigma = \frac{0{,}8}{0{,}254} \Rightarrow \underline{\sigma = 3{,}15}.$

b)

Siendo β la puntuación que supera el 35 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$P(X < \beta) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65;\ \ \mu = 4{,}8;\ \ \sigma = 3{,}14.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\beta-4{,}8}{3{,}14}.$

$P(X < \beta) = 0{,}65;\ \ P\left(Z < \frac{\beta-4{,}8}{3{,}14}\right) = 0{,}65.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,65 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}6480 --- 0{,}38 \\ 0{,}6517 --- 0{,}39 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 37 --- 0{,}01 \\ 20 ---- x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}20}{37} = 0{,}005.$$

$\frac{\beta-4,8}{3,14} = 0,385;\;\; \beta - 4,8 = 0,385 \cdot 3,14 = 1,209 \Rightarrow \underline{\beta \cong 6}.$

$c)$

$Datos: \mu = 4,8;\;\; \sigma = 3,14.$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-4,8}{3,14}.$

$P = P(2,8 \leq X \leq 6,8) = P\left(\frac{2,8-4,8}{3,14} \leq Z \leq \frac{6,8-4,8}{3,14}\right) = P\left(\frac{-2}{3,14} \leq Z \leq \frac{2}{3,14}\right) =$

$= P(-0,64 \leq Z \leq 0,64) = P(Z < 0,64) - [1 - P(Z < 0,64)] =$

$= P(Z < 0,64) - 1 + P(Z < 0,64) = 2 \cdot P(Z < 0,64) - 1 = 2 \cdot 0,7389 - 1 =$

$= 1,4778 - 1 = \underline{0,4778 = 47,78\,\%}.$

****

8º) El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24{,}47;\ \ 26{,}43)$ con un nivel del confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

----

a)

$$E=\frac{26{,}43-24{,}47}{2}=\frac{1{,}96}{2}=0{,}98. \qquad \overline{x}=\frac{24{,}47+26{,}43}{2}=\frac{50{,}9}{2}\Rightarrow \underline{\overline{x}=25{,}45}.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750\ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $\sigma=6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ \ E=0{,}98.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{6}{0{,}98}\right)^2=$

$=12^2=144.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 144 \textit{ jóvenes}.}$

b)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1-\alpha=0{,}97\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}97=0{,}03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$
$(1-0{,}015=0{,}9850\ \rightarrow z=2{,}17).$

Datos: $n=49;\ \ \sigma=6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2{,}17\cdot\frac{6}{\sqrt{49}}=2{,}17\cdot\frac{6}{7}\Rightarrow \underline{E=1{,}86}.$$

****