PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOQUE: ÁLGEBRA.

1º) Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Sean x, y, z el número de preguntas acertadas, falladas y no contestadas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ z+x=2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=90 \\ 12x-5y-3z=420 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-5-24-3+5-6-12}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{2\cdot(-15-28-18-14)}{-3}=$$

$$=\frac{-2\cdot 75}{-3}=2\cdot 25 \Rightarrow x=50.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 90 & 1 \\ 12 & 420 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 12 & 14 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{2 \cdot (14-9-14-36)}{-3} = \frac{-2 \cdot 45}{-3} = 2 \cdot 15 \Rightarrow y = 30.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 90 \\ 12 & -5 & 420 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 12 & -5 & 14 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{2 \cdot (-72+14+15+28)}{-3} = \frac{-2 \cdot 15}{-3} = 2 \cdot 5 \Rightarrow z = 10.$$

$$\underline{Acierta\ 50\ preguntas, falla\ en\ 30\ y\ no\ contesta\ en\ 10.}$$

****

2º) El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización a lo sumo 120 viviendas, de los tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda tipo A es 100.000 euros, y el de la del tipo B es 300.000 euros. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una de tipo B a 40.000 euros.

a) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

----

a)

Sean x e y el número de viviendas los tipos A y B que se construyen en la ciudad, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x+y\le 120 \\ 100.000x+300.000y\le 15.000.000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y\le 120 \\ x+3y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{aligned}\right\}.$$

$① \Rightarrow x+y\le 120 \Rightarrow y\le 120-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	120
y	120	0

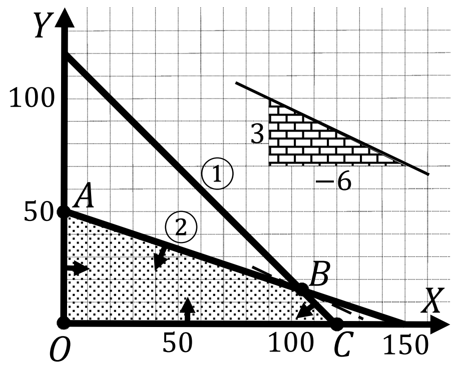
$② \Rightarrow x+3y\le 150 \Rightarrow y\le \frac{150-x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	150
y	50	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{aligned} x=0 \\ x+3y=120 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3y=120;\ \ y=40 \Rightarrow A(0,50).$$



$$B \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -x-y=-120 \\ x+3y=150 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=30;\ \ y=15;\ x=105 \Rightarrow B(105,15).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{aligned} y=0 \\ x+y=120 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=120 \Rightarrow C(120,0).$$

La función de objetivos es $f(x,y)=20.000x+40.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,50) = 20.000 \cdot 0 + 30.000 \cdot 40 = 0 + 120.000 = 120.000.$$

$$B \Rightarrow f(105,15) = 20.000 \cdot 105 + 40.000 \cdot 15 = 2.100.000 + 600.000 =$$

$$= 2.700.000.$$

$$C \Rightarrow f(120,0) = 20.000 \cdot 120 + 40.000 \cdot 0 = 2.400.000 + 0 = 2.400.000.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(105,15)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 20.000x + 40.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20.000}{40.000}x = -\frac{20.000}{40.000}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 105\ de\ tipo\ A\ y\ 15\ de\ tipo\ B.}$$

$b)$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 2.700.000\ euros.}$$

****

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} \;\; si \;\; x<0 \\ x^2-x-a \;\; si \;\; x\geq 0 \end{cases}$:

a) Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x=0$.

b) En el caso $a=2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.

c) En el caso $a=2$, realiza la representación gráfica de la función.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{1-2x}=1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-x-a)=-a=f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow -a=1 \Rightarrow \underline{a=-1}$.

b)

Para $a=2$ la función es $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} \;\; si \;\; x<0 \\ x^2-x-2 \;\; si \;\; x\geq 0 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Para $x<0$ la función es $f(x)=\frac{2x+1}{1-2x}$.

$f'(x)=\frac{2\cdot(1-2x)-(2x+1)\cdot(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2}=\frac{4}{(1-2x)^2}>0, \forall x<0$, lo cual implica que la función es monótona creciente para $x<0$, teniendo en cuanta, además, que el denominador de la función $(1-2x)$ no se anula para $x<0$.

Para $x\geq 0$ la función es $f(x)=x^2-x-2$, que es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2; su vértice (mínimo) es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 1 = 0;\ \ 2x = 1;\ \ x = \frac{1}{2}.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-2-8}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0, \frac{1}{2}\right).}$$

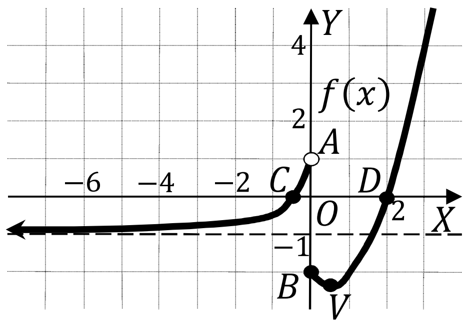
Para los máximos y mínimos relativos se tiene en cuenta lo siguiente:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = -1.\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^2 - x - 2) = \infty.$

El único extremo relativo de la función es: $\underline{Mínimo: V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).}$

$c)$

Teniendo en cuenta que la función tiene una asíntota horizontal en su parte negativa para $y = -1$ y todo lo obtenido en los apartados anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se expresa en la figura adjunta.



$f(0^-) = \frac{2\cdot0+1}{1-2\cdot0} = 1 \Rightarrow A(0, 1).$

$f(0^+) = 0^2 - 0 - 2 \Rightarrow B(0, -2)$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{1-2x} = 0;\ \ 2x + 1 = 0;\ \ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$

$x > 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(2, 0).$

****

4º) a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3. \qquad g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

d) Calcula $I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}\right) \cdot dx$.

----

a)

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3.$$

$$f'(x) = 2x \cdot (3x^3 + 5x)^3 + (x^2 - 1) \cdot [3 \cdot (3x^3 + 5x)^2 \cdot (9x^2 + 5)] =$$

$$= (3x^3 + 5x)^2 \cdot [2x \cdot (3x^3 + 5x) + 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot (9x^2 + 5)] =$$

$$= (3x^3 + 5x)^2[3(2x^4 + 5x^2 - 9x^2 - 5)] = (3x^3 + 5x)^2 \cdot [3(2x^4 - 4x^2 - 5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = 3x^2 \cdot (3x + 5)^2 \cdot (2x^4 - 4x^2 - 5)}.$$

$$g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{3x} \cdot e^{2x} - L(3x) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{\frac{1}{x} - 2 \cdot L(3x)}{e^{2x}} \Rightarrow \underline{g'(x) = \frac{1 - 2x \cdot L(3x)}{x \cdot e^{2x}}}.$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (2x+1) - (3x+6) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6x + 3 - 6x - 12}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}.$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow m = h'(1) = \frac{-9}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{-9}{9} \Rightarrow m = -1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $h(1) = \frac{3 \cdot 1 + 6}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow P(1, 3)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 3)$:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 1) = -x + 1.$$

$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x + y - 4 = 0}.$

$c)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = \frac{3}{2}\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2x + 1 = 0;\ \ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -\frac{1}{2}\ es\ asíntota\ vertical.}$$

$d)$

$$I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}\right) \cdot dx =$$

$$= \int e^{3x} \cdot dx - 3 \cdot \int x^2 \cdot dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx - 4 \cdot \int \frac{1}{(x+2)^2} \cdot dx =$$

$$= A - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2B - 4C \Rightarrow I = A - x^3 + 2B - 4C. \quad (*)$$

$$A = \int e^{3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 3x = t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot e^t \Rightarrow A = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}.$$

$$B = \int \frac{1}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x + 2 = t \\ dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = L|t| = L|x+2|.$$

$$C = \int \frac{1}{(x+2)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x + 2 = t \\ dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{t} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos por A, B y C:

$$I = A - x^3 + 2B - 4C = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - x^3 + 2 \cdot L|x+2| + \frac{4}{x+2} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - x^3 + L(x+2)^2 + \frac{4}{x+2} + K.}$$

****

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y en el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen error. Si abrimos el libro por una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

b) Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.

c) Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.

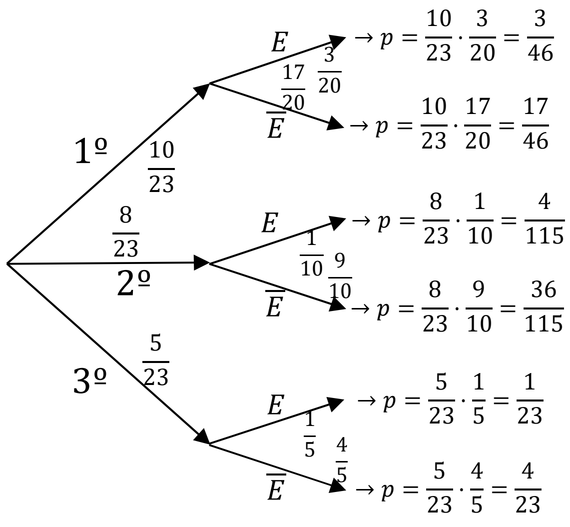
d) Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

----

a)

$$P(2º)=\frac{80}{230}=\frac{8}{23}=0{,}3478.$$

b)



$$P=P(3º\cap E)=P(3º)\cdot P(E|3º)=\frac{5}{23}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{23}=0{,}0435.$$

c)

$$P=P\left(\overline{E}\right)=P\left(1º\cap\overline{E}\right)+P\left(2º\cap\overline{E}\right)+P\left(3º\cap\overline{E}\right)=$$

$$=P(1º)\cdot P\left(\overline{E}\middle|1º\right)+P(2º)\cdot P\left(\overline{E}\middle|2º\right)+P(3º)\cdot P\left(\overline{E}\middle|3º\right)=$$

$$=\frac{10}{23}\cdot\frac{17}{20}+\frac{8}{23}\cdot\frac{9}{10}+\frac{5}{23}\cdot\frac{4}{5}=\frac{85}{230}+\frac{72}{230}+\frac{40}{230}=\frac{85+72+40}{230}=\frac{197}{230}=0{,}8565.$$

$d)$

$$P = P(3^{\text{o}}|E) = \frac{P(3^{\text{o}} \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{23} \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{197}{230}} = \frac{\frac{1}{23}}{\frac{33}{230}} = \underline{\frac{10}{33} = 0{,}3030.}$$

****

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ P(B) = 0{,}3\ y\ P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ P(D) = 0{,}6\ y\ P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ P(E) = 0{,}6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

----

a)

$Datos$: $P(A) = 0{,}4;\ P(B) = 0{,}3\ y\ P(A \cup B) = 0{,}5$.

$$P = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = \underline{0{,}2}.$$

b)

$Datos$: $P(C) = 0{,}5;\ P(D) = 0{,}6\ y\ P(C \cup D) = 0{,}7$.

$$P = P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \frac{0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}7}{0{,}6} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \underline{\frac{2}{3} = 0{,}6667}.$$

c)

$Datos$: $P(A) = 0{,}4;\ P(E) = 0{,}6$.

Dos sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$

$$P = P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}24 = \underline{0{,}76}.$$

****

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5 puntos ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

----

a)

$Datos: P(X > 7{,}6) = 0{,}3; \;\; \mu = 6{,}8.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$P(X > 7{,}6) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{7{,}6-6{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}3; \;\; P\left(Z > \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}3;$

$P\left(Z \leq \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,7 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}6985 - - - 0{,}52 \\ 0{,}7019 - - - 0{,}26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 26 - - - 0{,}01 \\ 15 - - - - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}15}{26} = 0{,}006.$$

$\frac{0{,}8}{\sigma} = 0{,}526; \;\; \sigma = \frac{0{,}8}{0{,}526} \Rightarrow \underline{\sigma = 1{,}52}.$

b)

Siendo β la puntuación que supera el 20 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$P(X < \beta) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80; \;\; \mu = 6{,}8; \;\; \sigma = 1{,}5.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\beta-6{,}8}{1{,}5}$.

$P(X < \beta) = 0{,}80; \;\; P\left(Z < \frac{\beta-6{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}80.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,80 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}7995 --- 0{,}84 \\ 0{,}8023 --- 0{,}85 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 28 --- 0{,}01 \\ 5 ---- x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}05}{28} = 0{,}002.$$

$$\frac{\beta-6{,}8}{1{,}5} = 0{,}842;\ \ \beta - 6{,}8 = 0{,}842 \cdot 1{,}5 = 1{,}263;\ \ 6{,}8 + 1{,}263 \Rightarrow \underline{\beta \cong 8{,}1}.$$

$c)$

$Datos$: $\mu = 6{,}8;\ \ \sigma = 1{,}5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(6{,}8; 1{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}8}{1{,}5}$.

$$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6{,}8}{1{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1{,}8}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1{,}2) =$$

$$= P(Z < 1{,}2) = 0{,}8849.$$

$\underline{Ha\ aprobado\ el\ examen\ el\ 88{,}49\ \%\ del\ alumnado}$.

****

8º) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1.000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) Interpretar los resultados obtenidos.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=1.000;\ \ p=\frac{860}{1.000}=0{,}86;\ \ q=1-0{,}86=0{,}14;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}86-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}86\cdot 0{,}14}{1.000}};\ 0{,}86+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}86\cdot 0{,}14}{1.000}}\right);$$

$(0{,}86-1{,}96\cdot 0{,}0110;\ 0{,}86+1{,}96\cdot 0{,}0110);\ \ (0{,}86-0{,}0215;\ 0{,}86+0{,}0215) \Rightarrow$

$\Rightarrow I.C._{95\,\%}=(0{,}8385;\ 0{,}8815).$

$\underline{Se\ estima\ que\ se\ ha\ vacunado\ entre\ el\ 83{,}85\ \%\ y\ 88{,}15\ \%\ de\ la\ población.}$

b)

$E=\frac{0{,}2215-0{,}1785}{2}=\frac{0{,}043}{2} \Rightarrow \underline{E=0{,}0215=2{,}15\ \%}.$

c)

De lo anterior se deduce que, con un error del 2,15 % se han vacunado entre el 83,85 % y el 88,15 % de la población con un nivel de confianza del 95 %.

****