PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Un pescadero compra el martes de una semana 96 kgr de merluza y 130 kgr de anchoas y paga por ello un total de 1836 euros. El miércoles siguiente, por el efecto de la crisis de las vacas locas, el precio de la merluza ha subido un 20 % y el de las anchoas un 30 %. Ese día, compra 40 kgr de merluza y 50 kgr de anchoas, y paga un total de 918 euros. ¿Son los datos anteriores suficientes para calcular el precio de la merluza y las anchoas el martes? Si la contestación es afirmativa, calcular dichos precios y, si es negativa, razonar por qué no se puede hacer dicho cálculo.

Suponiendo que los precios del martes de un kgr de merluza y de un kgr de anchoas es x e y, respectivamente, el precio del miércoles de un kgr de merluza y de un kgr de anchoas es de 1'2x y 1'3y, respectivamente.

Del supuesto anterior y con los datos del problema se plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} 96\cdot x+130\cdot y=1836 \\ 40\cdot 1'2x+50\cdot 1'3y=918 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} 48x+65y=918 \\ 48x+65y=918 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{48x+65y=918}$$

Resulta finalmente una ecuación con dos incógnitas, con lo cual el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto:

<u>Los datos no son suficientes para calcular el precio de los productos.</u>

****

Problema A.- Estudiar la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} 4x+2y+2z=2a \\ ax+y+z=1 \\ 2x+y+az=1 \end{cases}$ en función del valor de a. Resolver en los casos en que sea compatible indeterminado.

El sistema S es equivalente al sistema $S' \equiv \begin{cases} 2x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ 2x+y+az=1 \end{cases}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=2a+a+2-2-2-a^2=-a^2+3a-2=0 \;;;\; a^2-3a+2=0$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow \underline{a_1=1} \;;;\; \underline{a_2=2}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=2\cdot C_2\} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1+4+1-2-2-1=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos en el caso de compatible indeterminado (a = 1), en cuyo caso el sistema resulta ser $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$, que es equivalente a $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$.

Por ser el sistema resultante de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, para su resolución parametrizamos una variable, por ejemplo z, y resolvemos:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=1-\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=1-\lambda \\ -x-y=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=0 \;\;;;\;\; \underline{x=0} \;\;;;$$

$$x+y=1-\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=1-\lambda}$$

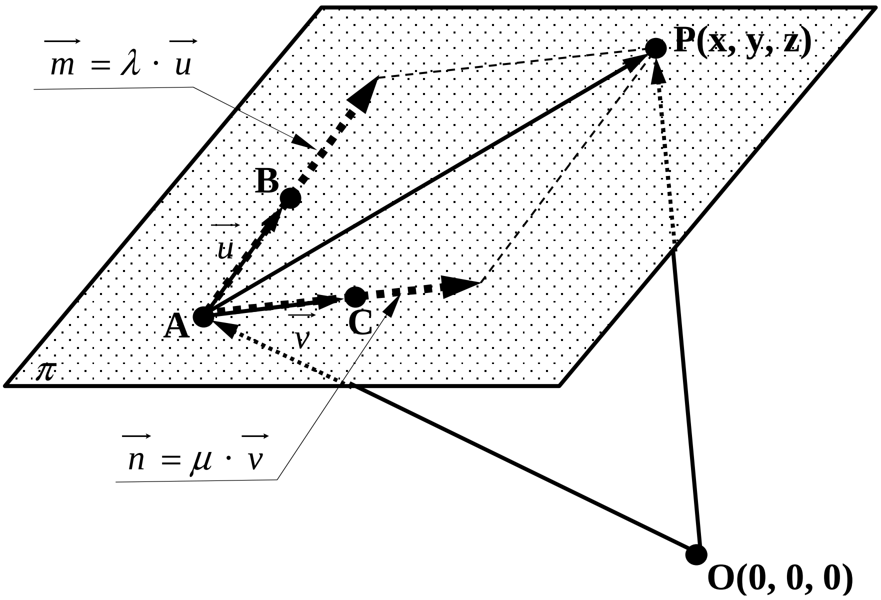
$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Describir una forma de hallar las ecuaciones paramétricas de un plano π si se conocen tres puntos suyos (no alineados) de coordenadas $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ y $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$. Aplicarlo para hallar la ecuación del plano que contiene a los siguientes puntos: A(2, 1, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 0, 1).

Un plano puede determinarse por dos vectores linealmente independientes que estén contenidos en el plano y por un punto del plano.



Dos vectores contenidos en el plano son los siguientes:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1,\ b_2,\ b_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (c_1,\ c_2,\ c_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3) = (c_1 - a_1,\ c_2 - a_2,\ c_3 - a_3)$$

De la observación de la figura se deduce que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, pero el vector $\overrightarrow{AP}$ es la suma de los vectores $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$, que son linealmente dependientes de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, respectivamente, de tal manera que: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v}$.

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OP} = (x,\ y,\ z)$ y que $\overrightarrow{OA} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, la expresión vectorial $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ queda de la siguiente forma, que es la ecuación vectorial del plano:

$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (a_1,\ a_2,\ a_3) + \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v}$; teniendo en cuenta los valores de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$\pi \equiv (x,\ y,\ z) = (a_1,\ a_2,\ a_3) + \lambda \cdot (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3) + \mu \cdot (c_1 - a_1,\ c_2 - a_2,\ c_3 - a_3)$, de donde se deduce la expresión del plano π por unas ecuaciones paramétricas:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) + \mu(c_1 - a_1) \\ y = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) + \mu(c_2 - a_2) \\ z = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) + \mu(c_3 - a_3) \end{cases}$$

Aplicando lo anterior a los puntos: A(2, 1, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 0, 1), sería:

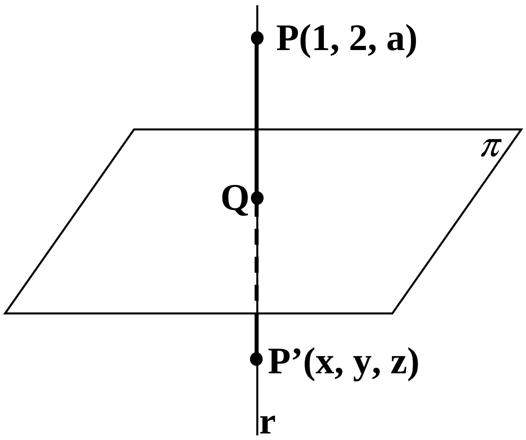
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ 1) - (2,\ 1,\ 0) = (-2,\ 0,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 0,\ 1) - (2,\ 1,\ 0) = (-1,\ -1,\ 1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - 2 \cdot \lambda - 1 \cdot \mu \\ y = 1 + 0 \cdot \lambda - 1 \cdot \mu \\ z = 0 + 1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

****

Problema B.- Se considera el punto P(1, 2, a), donde se supone que $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto del plano π.



Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 2)$.

La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo cual su vector director pude ser el normal del plano, y entonces: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = a + 2k \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r puede ser $Q'(1+k,\ 2+k,\ a+2k)$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0 \\ Q(1+k,\ 2+k,\ a+2k) \end{array}\right\} \Rightarrow (1+k) + (2+k) + 2(a+2k) - 3 = 0 \ ;;$$

$$1 + k + 2 + k + 2a + 4k - 3 = 0 \ ;;\ 6k + 2a = 0 \ ;;\ 3k + a = 0 \ ;;\ \underline{k = -\frac{a}{3}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q\left(1 - \frac{a}{3},\ 2 - \frac{a}{3},\ a - \frac{2a}{3}\right) \ ;;\ \underline{Q\left(\frac{3-a}{3},\ \frac{6-a}{3},\ \frac{a}{3}\right)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \ ;;\ \left(\frac{3-a}{3},\ \frac{6-a}{3},\ \frac{a}{3}\right) - (1,\ 2,\ a) = (x,\ y,\ z) - \left(\frac{3-a}{3},\ \frac{6-a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$$

$$\left(\frac{3-a}{3} - 1,\ \frac{6-a}{3} - 2,\ \frac{a}{3} - a\right) = \left(x - \frac{3-a}{3},\ y - \frac{6-a}{3},\ z - \frac{a}{3}\right) \ ;;$$

$$\left(\frac{3-a-3}{3},\ \frac{6-a-6}{3},\ \frac{a-3a}{3}\right) = \left(\frac{3x-3+a}{3},\ \frac{3y-6+a}{3},\ \frac{3z-a}{3}\right) \ ;;$$

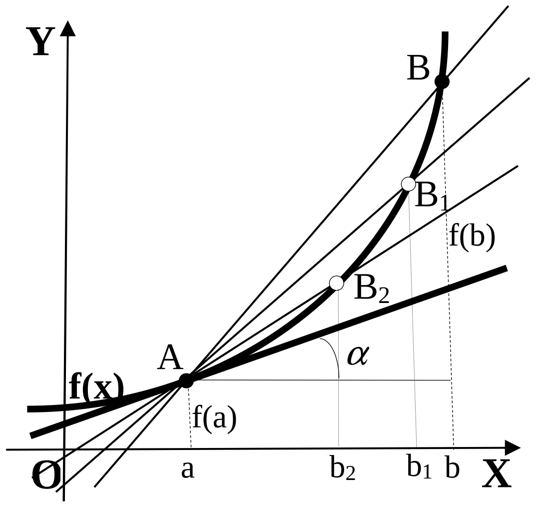
$$(-a,\ -a,\ -2a)=(3x-3+a,\ 3y-6+a,\ 3z-a) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-3+a=-a \quad \to \ \underline{x=\dfrac{3-2a}{3}} \\ 3y-6+a=-a \quad \to \ \underline{y=\dfrac{6-2a}{3}} \\ 3z-a=-2a \ \to \ \underline{z=-\dfrac{a}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{P'\left(\frac{3-2a}{3},\ \frac{6-2a}{3},\ -\frac{a}{3}\right)}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Se considera una función f derivable en un punto x = a. Escribir la ecuación de la recta tangente en dicho punto. ¿Cuál es el significado geométrico de dicha recta? Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 + 16$ en un punto genérico x = a. ¿Alguna de dichas rectas pasa por el punto exterior de la curva P(0, 0)?



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

La derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.

La recta tangente a la función $f(x) = x^3 + 16$ tiene como pendiente genérica el valor de la derivada para x = a:

$$f'(x) = 3x^2 \;\Rightarrow\; m = f'(a) = \underline{3a^2 = m}$$

El punto de tangencia es $f(a) = a^3 + 16 \;\Rightarrow\; Q(a,\; a^3 + 16)$.

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - (a^3 + 16) = 3a^2(x - a)\;;;\; y - a^3 - 16 = 3a^2x - 3a^3;$$

Recta tangente: $\underline{\underline{t \equiv 3a^2 x - y + (16 - 2a^3) = 0}}$.

Dependiendo del valor de a existen infinitas rectas tangentes; de todas ellas pasa por el punto P(0, 0) la que cumple la condición $16 - 2a^3 = 0$;; $a^3 = 8 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Para a = 2 la recta tangente es la siguiente: $\underline{\underline{t \equiv 12x - y = 0}}$

****

Problema C.- Se define la función f(x) mediante la fórmula $f(x) = x^6 e^{-x}$. Estudiar los máximos y mínimos locales de f(x). ¿Tiene algún tipo de asíntotas la función f(x)?

$$f(x) = \frac{x^6}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^5 \cdot e^x - x^6 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{6x^5 - x^6}{e^x} = \underline{\frac{x^5(6-x)}{e^x} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^5(6-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow x^5(6-x) = 0 \;;;\; \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 6}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R:

$$Para \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x < 0 \\ x > 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente: \; (-\infty, \; 0) \cup (6, \; +\infty)}}$$

$$Para \Rightarrow 0 < x < 6 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente: \; (0, \; 6)}}$$

$$f'(x) = \frac{6x^5 - x^6}{e^x} = \frac{x^5(6-x)}{e^x} \Rightarrow f''(x) = \frac{(30x^4 - 6x^5) \cdot e^x - x^5(6-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x(30x^4 - 6x^5 - 6x^5 + x^6)}{(e^x)^2} = \frac{x^6 - 12x^5 + 30x^4}{e^x} = \underline{\frac{x^4(x^2 - 12x + 30)}{e^x} = f''(x)}$$

$$f''(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{No \; es \; máximo \; ni \; mínimo \; relativo \; para \; x = 0}$$

$$f''(6) = \frac{6^4(6^2 - 12 \cdot 6 + 30)}{e^6} = \frac{6^4 \cdot (-6)}{e^6} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo \; relativo \; para \; x = 6}$$

$$f(6) = \frac{6^6}{e^6} = \left(\frac{6}{e}\right)^6 \cong 115 \Rightarrow \underline{\underline{Máx. \; (6, \; 115)}}$$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

<u>Horizontales</u>: Son los valores de y cuando x tiende a más infinito y a menos infinito:

$$y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^6}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^5}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow (\text{Re}iterando \; L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{e^x} = \frac{k}{\infty} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^6}{e^x} = \frac{\infty}{e^{-\infty}} = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow$$ <u>No hay más asíntotas horizontales.</u>

<u>Verticales</u>: Son los valores de x que anulan el denominador.

$$e^x = 0 \;\; ;; \;\; x \notin R \Rightarrow$$ <u>No existen asíntotas horizontales.</u>

<u>Oblicuas</u>: Solamente tienen asíntotas oblicuas las curvas racionales cuyo numerador tiene por grado una unidad mayor que el denominador. Además, si una función tiene asíntotas horizontales no puede tener asíntotas oblicuas.

<u>No existen asíntotas oblicuas.</u>

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Enuncia la Formula de Barrow para el cálculo de integrales definidas. Aplicar dicha fórmula para encontrar el valor de la integral $I=\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\cdot dx$.

El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente: “Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad $\int_a^b f(x)\cdot dx = F(b)-F(a)$”.

El valor de la integral indefinida $Z=\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\cdot dx$ es el siguiente:

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2A-2B=0 \\ 3A+2B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=1} \;;;\; \underline{B=-1}$$

$$Z=\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\cdot dx=\int \frac{1}{x+2}\cdot dx-\int \frac{1}{x+3}\cdot dx = L|x+2|-L|x+3| = \underline{L\left|\frac{x+2}{x+3}\right|=Z}$$

Sustituyendo en el valor de I:

$$I=\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+3)}\cdot dx=\left[L\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right]_1^2 = L\frac{2+2}{2+3}-L\frac{1+2}{1+3}=L\frac{4}{5}-L\frac{3}{4}=L\left(\frac{4}{5}:\frac{3}{4}\right)=$$

$$\underline{\underline{=L\frac{16}{15}=I}}$$

****

Problema D.- Las rectas $r_1 \equiv y - 8x = 0$ y $r_2 \equiv y - x = 0$ limitan junto con la curva de ecuación $y = \frac{24}{x+2}$ un recinto plano. Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular el área de la parte del recinto situada en el primer cuadrante del plano, mediante una integración adecuada.

Las rectas r_1 y r_2 son afines, por lo cual se cortan en el origen de coordenadas.

Los puntos de corte de cada una de las rectas con la curva pertenecientes al primer cuadrante son los que se subrayan de los siguientes:

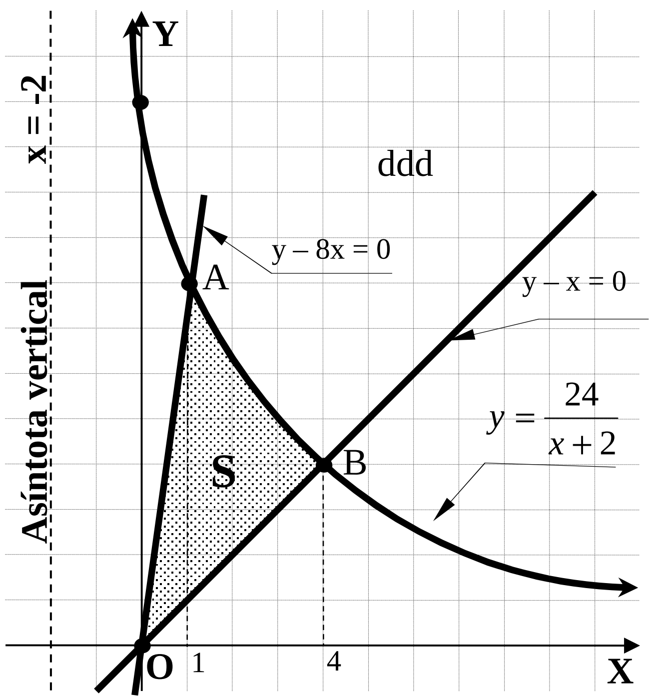
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{24}{x+2} \\ y - 8x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{24}{x+2} = 8x \;;;\; 24 = 8x^2 + 16x \;;;\; 8x^2 + 16x - 24 = 0 \;;;\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;;;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \to \underline{A(1,\ 8)} \\ x_2 = -3 \to M(-3,\ -24) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{24}{x+2} \\ y - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{24}{x+2} = x \;;;\; 24 = x^2 + 2x \;;;\; x^2 + 2x - 24 = 0 \;;;$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \to \underline{B(4,\ 4)} \\ x_2 = -6 \to N(-6,\ -6) \end{cases}$$

La representación grafica, aproximada, de la situación a estudiar es la siguiente:



De la observación de la figura, el área pedida (sombreada), es la siguiente:

$$S=\int_0^1 8x\cdot dx+\int_1^4 \frac{24}{x+2}\cdot dx-\int_0^4 x\cdot dx=\left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^1+24\cdot\left[L\left|x+2\right|\right]_1^4-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=$$

$$=4-0+24\cdot(L6-L3)-(8-0)=4+24L\frac{6}{3}-8=\underline{\underline{4(6L2-1)\,u^2=S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Se sabe que el dominio de definición de la función F(x) es el intervalo $[1,\ 9]$. Hallar, de forma razonada, los dominios de definición de las siguientes funciones: $G(t)=F\left(\dfrac{1-3t}{2}\right)$, $H(t)=F\left(t^2\right)$ y $J(t)=F(2t-1)$.

$$G(t)=F\left(\frac{1-3t}{2}\right)\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l\|r} x=\dfrac{1-3t}{2} & x=9\rightarrow t=-\dfrac{17}{3} \\ t=\dfrac{1-2x}{3} & x=1\rightarrow t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(G)\Rightarrow\left[-\frac{1}{3},\ -\frac{17}{3}\right]}}$$

$$H(t)=F\left(t^2\right)\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l\|r} x=t^2 & x=9\rightarrow t=\pm 3 \\ t=\pm\sqrt{x} & x=1\rightarrow t=\pm 1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(H)\Rightarrow[-1,\ -3]\cup[1,\ 3]}}$$

$$J(t)=F(2t-1)\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l\|r} x=2t-1 & x=9\rightarrow t=5 \\ t=\dfrac{x+1}{2} & x=1\rightarrow t=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(J)\Rightarrow[1,\ 5]}}$$

****

Problema E.- En una reunión hay un conjunto de personas, se saludan todas entre sí excepto una de ellas que únicamente saluda a cuatro personas. Sabiendo que el número total de saludos es igual a 109, calcular el número de personas que se encontraban en la reunión.

Supongamos que x es el número de personas que hay en la reunión, de las cuales (x – 1) se saludan entre sí.

El número de saludos entre las (x – 1) personas es el número de combinaciones binarias sin repetición que pueden formarse; es decir:

$$n = C_{(x-1),\ 2} = \binom{x-1}{2} = \frac{(x-1)!}{[(x-1)-2]!\cdot 2!} = \frac{(x-1)!}{(x-3)!\cdot 2} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)!}{(x-3)!\cdot 2} =$$

$$= \underline{\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2} = n}$$

Teniendo en cuenta que la persona excluida realiza 4 saludos y que el total de saludos es de 109, sería:

$$\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2} + 4 = 109 \ ;; \ \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2} = 105 \ ;; \ (x-1)\cdot(x-2) = 210 \ ;;$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = 210 \ ;; \ x^2 - 3x - 208 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+832}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{3 \pm 29}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = 16} \ ;; \ \underline{x_2 = -13}$$

La solución x = -13 carece de sentido lógico.

<u>El número de personas que hay en la reunión es 16.</u>

****