PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

SEPTIEMBRE - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Encontrar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ en función de α, b y c.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \Rightarrow \{\text{restando a cada columna la anterior}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-b^2 \\ b^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+a)(b-a) & (c+b)(c-b) \\ (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-b)(c^2+bc+b^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & b+c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-b)\left(ab^2+abc+ac^2+b^3+b^2c+bc^2-a^2b-ab^2-b^3-a^2c-abc-b^2c\right) =$$

$$= (b-a)(c-b)\left(ac^2+bc^2-a^2b-a^2c\right) = (b-a)(c-b)\left[ac(c-a)+b\left(c^2-a^2\right)\right] =$$

$$= (b-a)(c-b)[ac(c-a)+b(c+a)(c-a)] = \underline{(b-a)(c-b)(c-a)(ab+ac+bc)}.$$

$$\underline{\underline{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)}}$$

****

Problema A.- Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+ay+az=5 \\ 4x+az=5 \end{cases}$, en función del valor del parámetro α. Resolverlo cuando sea compatible determinado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & a & a & 5 \\ 4 & 0 & a & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & 0 & a \end{vmatrix}=a^2+4a+4a-3a=a^2+5a=a(a+5)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-5}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado}$$

$$Para\ \alpha=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-(15-20)=5\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}$$

$$Para\ \alpha=-5 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 5 \\ 4 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_4=-C_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ a=-5 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ indeterminado}$$

b)

Resolvemos para $\begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -5 \end{Bmatrix}$, para los cuales el sistema es compatible determinado. Aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 5 & a & a\\ 5 & 0 & a\end{vmatrix}}{a(a+5)}=\frac{a^2+5a+5a-5a}{a(a+5)}=\frac{a^2+5a}{a(a+5)}=\underline{\underline{1=x}}\,.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 5 & a\\ 4 & 5 & a\end{vmatrix}}{a(a+5)}=\frac{5a-15+4a+20-5a-3a}{a(a+5)}=\frac{a+5}{a(a+5)}=\underline{\underline{\frac{1}{a}=y}}\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & a & 5\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}}{a(a+5)}=\frac{5a+20-4a-15}{a(a+5)}=\frac{a+5}{a(a+5)}=\underline{\underline{\frac{1}{a}=z}}$$

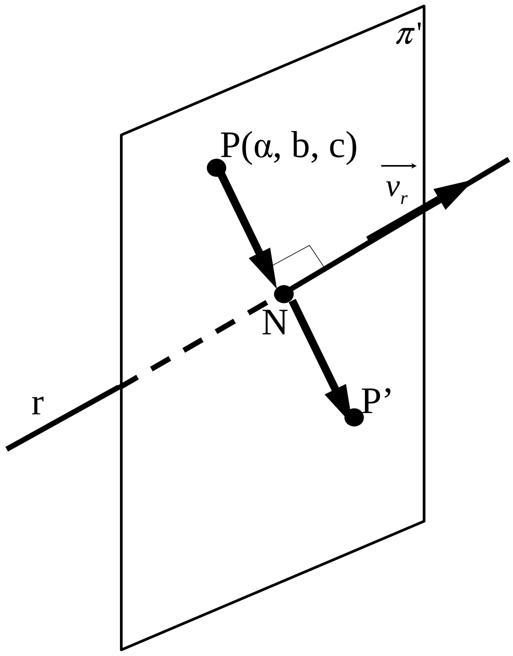
****

BLOQUE B

Cuestión B.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ y un punto exterior a la misma, $P(a,\ b,\ c)$, describir el proceso para calcular el punto simétrico respecto a r.

Para una mejor comprensión del ejercicio nos iremos guiando por el gráfico adjunto.

En primer lugar determinamos un vector director de la recta r, para lo cual basta con expresarla mediante unas ecuaciones paramétricas o continuas.



A continuación determinamos el haz de planos π perpendiculares a r, que tiene como vector normal al vector director de r.

De los infinitos planos del haz π, determinamos el plano π' que contiene al punto P(α, b, c), que es el que satisface su ecuación.

Seguidamente determinamos el punto N de intersección de la recta r con el plano π', que se obtiene resolviendo el sistema que determinan la recta r y el plano π'.

Finalmente, para determinar el punto P', simétrico de P con respecto a r, determinamos el vector $\overrightarrow{PN}$.

De la igualación de los vectores $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'}$ se obtiene la expresión de P'.

****

Problema B.- Sean $r_1 \equiv \begin{cases} 3x+y+z=-1 \\ 2x+y-z=-2 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 6x+2y+2z=-2 \\ x+az=0 \end{cases}$. Estudiar si existe o no algún valor de α para el cual las rectas no se cortan. En caso negativo razona la respuesta y en caso afirmativo calcular dicho valor de α.

Las rectas r_1 y r_2 determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=-1 \\ 2x+y-z=-2 \\ 6x+2y+2z=-2 \\ x+az=0 \end{array}\right\}$, que es equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=-1 \\ 2x+y-z=-2 \\ x+az=0 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=3a-1-1-2a=a-2=0 \Rightarrow \underline{a=2}.$$

$$Para \;\; a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1,\, C_2,\, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=3}.$$

Para α ≠ 2 ⟶ Rango M = Rango M' = 3.

Para $\alpha = 2 \rightarrow$ Rango M = 2 ;; Rango M' = 3.

Para $\alpha \neq 2$ las rectas r_1 y r_2 son secantes.

Para $\alpha = 2$ las rectas r_1 y r_2 son paralelas.

****

BLOQUE C

Cuestión C.- De una función f se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real. Además se sabe que f(0) = 2 y que f'(0) = -2. Se definen dos nuevas funciones mediante $g(x)=e^{f(x)}$ y $h(x)=f(e^x)$. ¿Hay datos suficientes para hallar g'(0)? En caso afirmativo realizar dicho cálculo y en caso negativo explicar por qué no es posible.

Por ser f derivable en todos los puntos de la recta real, también lo es la función $g(x)=e^{f(x)}$.

También se sabe que $g(x)=e^{f(x)}>0,\ \forall x\in R$, por lo cual pueden tomarse logaritmos neperianos en la expresión $g(x)=e^{f(x)}$, obteniéndose: $L[g(x)]=f(x)$.

Derivando la expresión anterior: $\frac{g'(x)}{g(x)}=f'(x) \Rightarrow \underline{g'(x)=g(x)\cdot f'(x)}$.

$g'(0)=g(0)\cdot f'(0)=-2\cdot g(0)$.

Teniendo en cuenta que $g(x)=e^{f(x)}$, para x = 0 es $g(0)=e^{f(0)}=e^2$.

Sustituyendo el valor obtenido de $g(0)=e^2$ en la expresión de $g'(0)$:

$g'(0)=-2\cdot g(0)=-2\cdot e^2$.

$$\underline{\underline{g'(0)=-2e^2}}$$

****

Problema C.- Estudiar el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}$. Trazar un esquema de su gráfica.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$$(x+2)(x-1)=0 \;;;\; x_1=-2 \;;;\; x_2=1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-2,\ 1\}}}$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento obtenemos la primera derivada, teniendo en cuenta que $(x+2)(x-1)=x^2+x-2$:

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+2)(x-1)-(2x+1)\cdot(2x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}=\frac{2\cdot\left(x^2-x+2x-2\right)-\left(4x^2+4x+1\right)}{(x+2)^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+x-2\right)-4x^2-4x-1}{(x+2)^2(x-1)^2}=\frac{2x^2+2x-4-4x^2-4x-1}{(x+2)^2(x-1)^2}=\frac{-2x^2-2x-5}{(x+2)^2(x-1)^2}=\underline{\frac{-\left(2x^2+2x+5\right)}{(x+2)^2(x-1)^2}=f'(x)}.$$

$$2x^2+2x+5=0 \;;;\; x=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{4}\Rightarrow x\notin R \;\Rightarrow\; -\left(2x^2+2x+5\right)<0,\ \forall x\in R.$$

Según lo anterior y de la observación de la derivada se deduce que:

<u>La función es monótona decreciente en su dominio.</u>

Como no existen valores reales que anulen el numerador de la derivada:

<u>La función no tiene máximos ni mínimos relativos.</u>

Las asíntotas horizontales son los valores de la función cuando $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x-2}=0 \;\Rightarrow\;$$ <u>La recta y = 0 (eje X) es asíntota horizontal.</u>

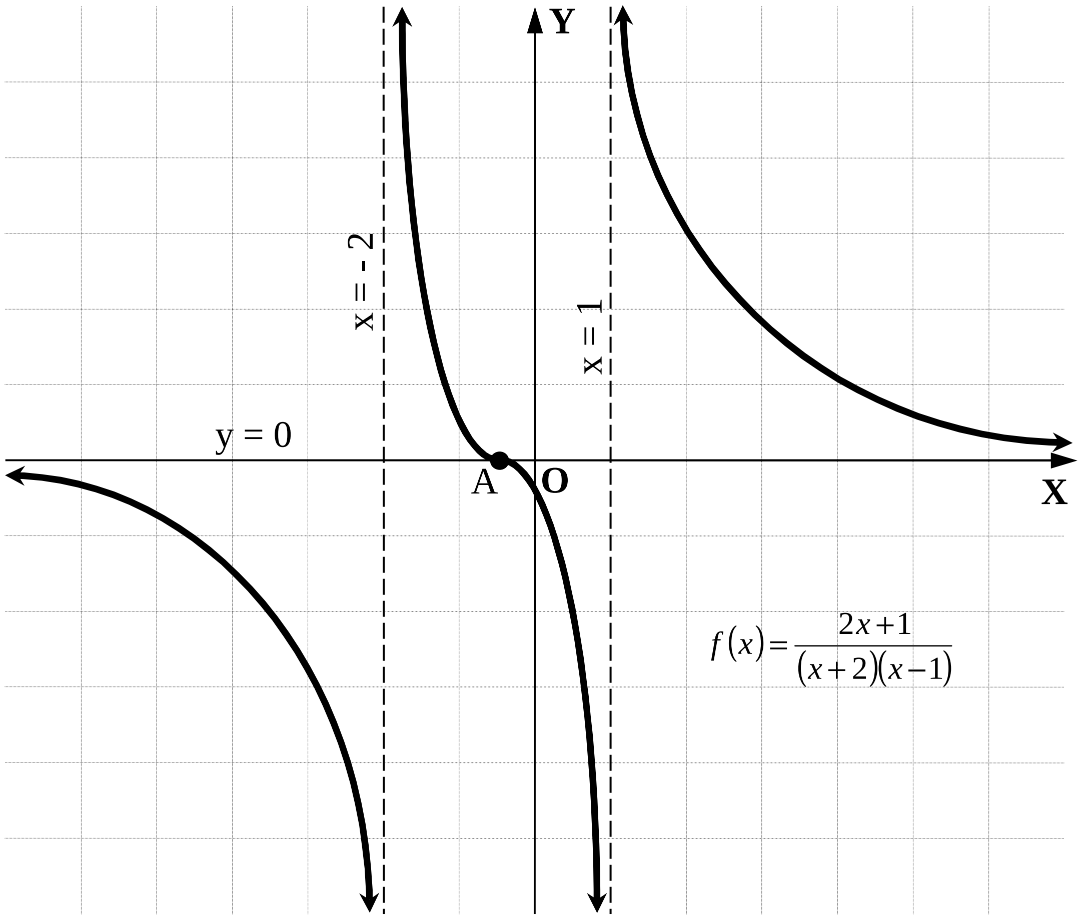
Las asíntotas verticales son los valores finitos de x para los cuales se anula el denominador:

$$(x+2)(x-1)=0 \;;;\; \underline{x_1=-2} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

<u>Las rectas x = -2 y x = 1 son asíntotas verticales.</u>

Por ser el grado del numerador menor que el grado del numerador, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Con los datos obtenidos anteriormente y teniendo en cuenta que la función se anula para x = - ½, en el punto A(- ½, 0), (que es un punto de inflexión), puede representarse la función cuya gráfica el la siguiente.



****

BLOQUE D

Cuestión D.- Se considera el intervalo $I=[0,\ 16]$ y la partición dada por la siguiente expresión: P = {0, 4, 8, 12, 14, 16}. Sea f la función definida por $f(x)=|x-7|$. Calcular el valor de la suma superior y la suma inferior de dicha función para la partición P del intervalo I definida antes.

La función $f(x)=|x-7|$ puede redefinirse de la forma: $f(x)=\begin{cases}-x+7 & si\ \ x<7\\ x-7 & si\ \ x\geq 7\end{cases}$.

La expresión de la suma superior viene dada por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=f(x_1)\cdot(x_1-x_0)+f(x_2)\cdot(x_2-x_1)+\ \cdots\cdots+f(x_n)\cdot(x_n-x_{n-1}).$$

La expresión de la suma inferior viene dada por la expresión:

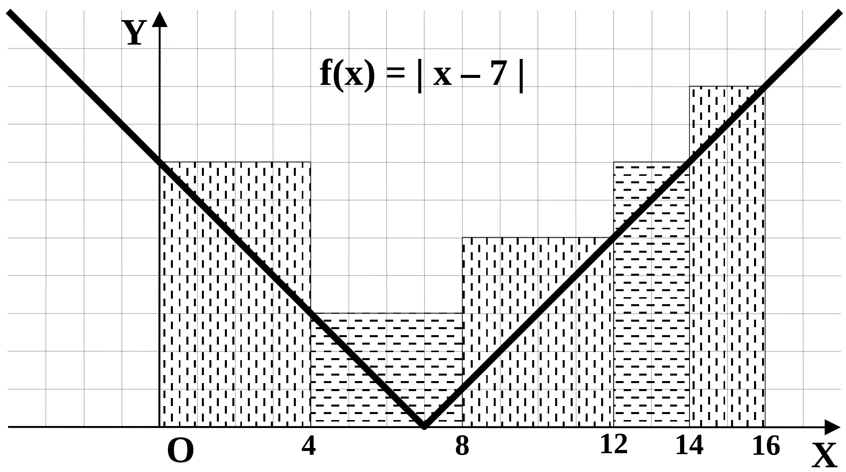
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_1)=f(x_0)\cdot(x_1-x_0)+f(x_1)\cdot(x_2-x_1)+\ \cdots\cdots+f(x_{n-1})\cdot(x_n-x_{n-1}).$$

Teniendo en cuenta que: $x_0 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 12$, $x_4 = 14$ y $x_5 = 16$, y que: f(0) = 7, f(4) = 3, f(8) = 1, f(12) = 5, f(14) = 7 y f(16) = 9.

Suma superior:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=7\cdot 4+3\cdot 4+5\cdot 4+7\cdot 2+9\cdot 2=28+12+20+14+18=92\ .$$

Suma superior = 92

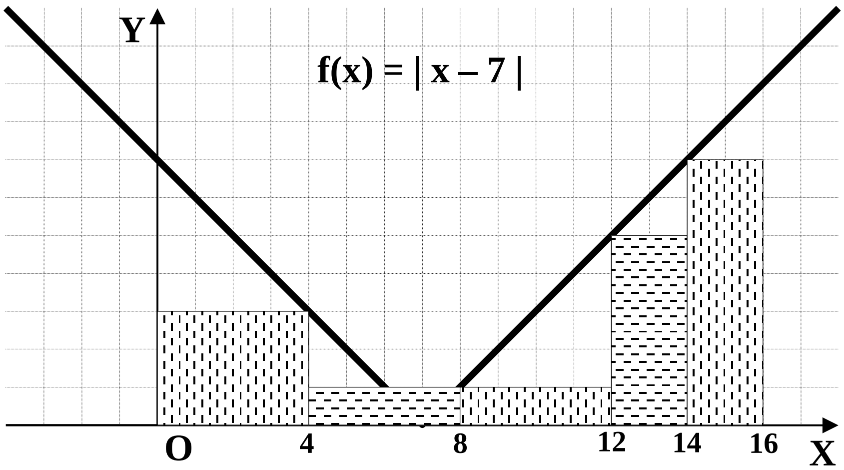


Suma superior

Suma inferior:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)\cdot\left(x_{i+1}-x_i\right)= 3\cdot 4+1\cdot 4+1\cdot 4+5\cdot 2+7\cdot 2 =12+4+4+10+12=42$$

<u>Suma inferior = 44</u>



Suma inferior

****

Problema D.- Hallar una primitiva de las funciones $f(x)=\cos^3 x$ y $g(x)=\frac{1}{4x^2+1}$. Utilizando dichas primitivas, hallar el valor de las integrales definidas $\int_0^\pi \cos^3 x \cdot dx$ y $\int_0^\pi \frac{dx}{4x^2+1}$.

$$I=\int \cos^3 x \cdot dx=\int \cos x \cdot \cos^2 x \cdot dx=\int \cos x \cdot \left(1-sen^2 x\right)\cdot dx=\int \left(\cos x-\cos x \cdot sen^2 x\right)\cdot dx=$$

$$=\int \cos x \cdot dx-\int \cos x \cdot sen^2 x \cdot dx=sen\ x-\int \cos x \cdot sen^2 x \cdot dx=\underline{sen\ x-I_1=I}\ .$$

$$I_1=\int sen^2 x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} sen\ x=t \\ \cos x \cdot dx=dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_1=\int t^2 \cdot dt=\frac{t^3}{3}=\underline{\frac{1}{3}\cdot sen^3 x=I_1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1, queda: $\underline{I=sen\ x-\frac{1}{3}\cdot sen^3 x+C}$.

$$\int_0^\pi \cos^3 x \cdot dx=\left[sen\ x-\frac{1}{3}\cdot sen^3 x\right]_0^\pi=\left(sen\ \pi-\frac{1}{3}\cdot sen^3 \pi\right)-\left(sen\ 0-\frac{1}{3}\cdot sen^3 0\right)=0-0=0\ .$$

$$\underline{\underline{\int_0^\pi \cos^3 x \cdot dx=0}}$$

$$I=\int \frac{1}{4x^2+1}\cdot dx=\int \frac{1}{(2x)^2+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x=t \\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt=\frac{1}{2}arc\ tag\ t+C=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}arc\ tag\ (2x)+C=I}\ .$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{4x^2+1}=\left[\frac{1}{2}arc\ tag\ (2x)\right]_0^\pi=\left(\frac{1}{2}arc\ tag\ (2\pi)\right)-\left(\frac{1}{2}arc\ tag\ (0)\right)=0-0=0\ .$$

$$\underline{\underline{\int_0^\pi \frac{dx}{4x^2+1}=0}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Una persona regala a sus sobrinos los libros de su biblioteca de forma que regala a cada sobrino 17 libros. Además se sabe que si hubiese regalado al primer sobrino un libro, al segundo dos, al tercero tres y así sucesivamente también habría agotado la biblioteca. Con los datos anteriores, calcular el número de sobrinos y el número total de libros.

Sean x el número de sobrinos e y el número de libros de la biblioteca.

$y = 17x$. Como x e y son números naturales, el número de libros de la biblioteca es múltiplo de 17.

Por otra parte, según el hipotético segundo reparto, la suma de x números naturales consecutivos, partiendo del 1, también tiene que ser múltiplo de 17.

La suma de los x números consecutivos viene dada por la fórmula de la suma de los x términos de una progresión aritmética de primer término 1, de diferencia 1 y de número de términos x; es la siguiente:

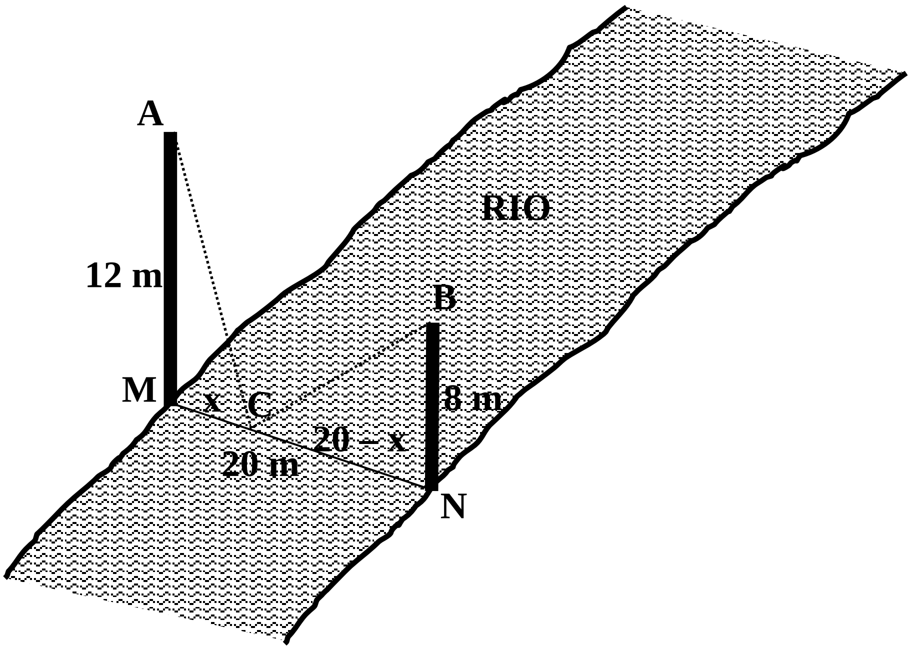
$$S = y = \frac{1+x}{2} \cdot x \;;;\; 17x = \frac{1+x}{2} \cdot x \;;;\; 17 = \frac{1+x}{2} \;;;\; 34 = 1 + x \;;;\; \underline{x = 33}.$$

$$y = 17x = 17 \cdot 33 = \underline{561 = y}.$$

La persona tiene 33 sobrinos y su biblioteca tiene 561 libros.

****

Problema E.- A ambas orillas de un río de 20 metros de ancho hay dos palmeras la una frente a la otra. La altura de una es de 12 metros y la de la otra es de 8 metros. En la copa de cada palmera se encuentran sendos pájaros que descubren un pez en la superficie del agua. Los pájaros se lanzan a la vez y a la misma velocidad alcanzando al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia de la base del tronco de cada palmera apareció el pez?



Los triángulos AMC y BCN son rectángulos y tienen la hipotenusa igual, por ser iguales los recorridos de los dos pájaros.

Aplicando el teorema de Pitágoras a sendos triángulos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC}^2 = 12^2 + x^2 \\ \\ \overline{BC}^2 = 8^2 + (20-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow 12^2 + x^2 = 8^2 + (20-x)^2 \;\; ;;$$

$$144 + x^2 = 64 + 400 - 40x + x^2 \;\; ;; \;\; 40x = 464 - 144 \;\; ;; \;\; 40x = 320 \;\; ;; \;\; \underline{x = 8}\,.$$

El pez apareció a 8 metros de la palmera mayor y a 12 metros de la menor.

****