

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Para cada a se considera la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar el rango de la matriz $A^2(a) - A^T(a)$ en función del valor de a .

Se recuerda que $A^2(a)$ es la matriz multiplicada por sí misma y $A^T(a)$ es la matriz traspuesta.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & a+a+0 & 1+a^2+1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+a+a \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2+1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2(a) - A^T(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2+1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a & a^2+1 \\ -a & 0 & 2a \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} = A^2(a) - A^T(a)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2a & a^2+1 \\ -a & 0 & 2a \\ -1 & -a & 0 \end{vmatrix} = a^2(a^2+1) - 4a^2 = a^2(a^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \sqrt{3} \\ a_3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \sqrt{3} \\ a \neq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango de } A^2 - A^T = 3$$

$$\underline{a=0} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Para } a=0 \Rightarrow \text{Rango de } A^2 - A^T = 1}}$$

$$\underline{a=\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 4 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Para } a=\sqrt{3} \Rightarrow \text{Rango de } A^2 - A^T = 2}}$$

$$\underline{a=-\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 4 \\ \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Para } a=-\sqrt{3} \Rightarrow \text{Rango de } A^2 - A^T = 2}}$$

Problema A.- Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + az = 2a \end{cases}$, demostrar que es compatible para todos los valores de a. Resolverlo en los casos en que sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix} ;; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & a & 2a \end{pmatrix}$$

Como puede observarse en la matriz de coeficientes, las columnas tercera y cuarta son linealmente dependientes, por lo tanto su rango es igual que la matriz de coeficientes, independientemente del valor de a, lo cual significa que

El sistema es compatible $\forall a \in R$, c.q.d.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = a + 4 - 3 - 2a = 1 - a = 0 ;; \underline{a = 1}$$

Para $a \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

Para $a = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

Resolvemos para $x = 1$: (despreciamos la tercera ecuación y parametrizamos z)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} ;; \begin{cases} x + y = -\lambda + 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda - 2}$$

$$2x + y = 0 ;; y = -2x = \underline{-2\lambda + 4 = y}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda - 2 \\ y = -2\lambda + 4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

BLOQUE B

Cuestión B.- Sean $A(0, 1, 2)$ y $B(1, 2, 3)$. Encontrar la ecuación de la recta r que pasa por dichos puntos y expresarla por unas ecuaciones paramétricas. ¿Existen valores de a y b para los cuales el punto $C(3, a+b, a-b)$ pertenezca a la recta r . En caso afirmativo, calcular los valores de a y b . Razonar la contestación en caso negativo.

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (0, 1, 2) = (1, 1, 1)$ es un vector director de la recta r , por tanto unas ecuaciones paramétricas pueden ser, considerando el punto A :

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

Para que la recta pase por el punto C es necesario que el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sea linealmente dependiente a $\vec{u}$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3, a+b, a-b) - (0, 1, 2) = (3, a+b-1, a-b-2)$$

$$\frac{3}{1} = \frac{a+b-1}{1} = \frac{a-b-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1=3 \\ a-b-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=5 \end{cases} \Rightarrow 2a=9 \quad ;; \quad \underline{\underline{a=\frac{9}{2}}}$$

$$a-b=5 \quad ;; \quad b=a-5 = \frac{9}{2} - 5 = \frac{9-10}{2} = -\frac{1}{2} = \underline{\underline{b}}$$

Como puede observarse, existen los valores obtenidos de a y b para los cuales la recta r pasa por el punto C .

Problema B.- Sea la recta r que pasa por el punto $P(0, 1, 0)$ y que tiene como vector director a $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Se considera también el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$. Estudiar la posición relativa de la recta r y del plano π en función de A .

El vector normal del plano es $\vec{n} = (-1, 2, 1)$.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares ya que su producto escalar es cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 1, -1) \cdot (-1, 2, 1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

Esto significa que la recta r es paralela al plano π o está contenida en él, en cuyo caso el punto $P \in r$ también se cumpliría que $P \in \pi$.

Si $P \in \pi$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + 2y + z + A = 0 \\ P(0, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 2 \cdot 1 + 0 + A = 0 \quad ; \quad \underline{A = -2}$$

$$\text{Solución : } \left\{ \begin{array}{l} A = -2 \Rightarrow r \text{ está contenida en } \pi \\ A \neq -2 \Rightarrow r \text{ es paralela a } \pi \end{array} \right.$$

BLOQUE C

Cuestión C.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. ¿Existen valores de a con los cuales f sea derivable en toda la recta real?

En cualquier caso, razonar la contestación y si es afirmativa, encontrar dichos valores.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por tanto, veamos si es continua para $x = 0$, que es el único punto crítico que posee la función:

Para que sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - ax^2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)}{}$$

La función es continua para $x = 0$.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ es derivable } \forall a \in \mathbb{R}}}$$

Problema C.- Del polinomio $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$ se sabe que su recta tangente en el punto $x = 1$ es paralela a la recta $y = 7x - 3$ y también se sabe que tiene un punto extremo en $x = -1$. Con estos datos, hallar A y B y razonar si con dichos valores $P(x)$ tiene algún otro extremo, además del correspondiente al punto $x = -1$.

La pendiente de la recta es $m = 7$, que tiene que ser igual al valor de la derivada para $x = 1$:

$$P'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \quad ; \quad P'(1) = 3 + 2A + B = 7 \quad ; \quad \underline{2A + B = 4} \quad (1)$$

Por tener un extremo para $x = -1$, la derivada tiene que anularse para este valor:

$$P'(-1) = 0 \quad ; \quad P'(-1) = 3 - 2A + B = 0 \quad ; \quad \underline{-2A + B = -3} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 2A + B = 4 \\ -2A + B = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{1}{2}}} \quad ; \quad 2A + B = 4 \quad ; \quad A = \frac{4 - B}{2} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{8 - 1}{2}}{2} = \frac{7}{4} = \underline{\underline{A}}$$

El polinomio resulta ser $P(x) = x^3 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$. Veamos si tiene otros extremos:

$$P'(x) = 3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \quad ; \quad P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad ; \quad 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-7 \pm 5}{12} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{6} \\ \underline{\underline{x_2 = -1}} \end{array} \right.$$

$$P''(x) = 6x + \frac{7}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(-\frac{1}{6}) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{7}{2} = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo para x = -\frac{1}{6}}} \\ P''(-1) = -6 + \frac{7}{2} = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máxim para x = -1, como se sabía}} \end{array} \right.$$

BLOQUE D

Cuestión D.- Describir en qué consiste el método de integración por partes para el cálculo de primitivas. Aplicar dicho método para calcular las siguientes primitivas:

$$I = \int x \cdot e^{2x} \cdot dx ; J = \int x \cdot L x \cdot dx$$

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraicas de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I = \int x \cdot e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ e^{2x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + C = \underline{\underline{\frac{e^{2x}}{4} (2x - 1) + C = I}}$$

$$J = \int x \cdot L x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L x \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I = L x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot L x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x}{4} (2 L x - x) + C = J}}$$

Problema D.- La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito del plano. Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

La curva puede expresarse de la forma: $y = (x-1)^2$, que tiene un mínimo en el punto $M(1, 0)$.

Sabiendo que la recta que pasa por dos puntos es: $r \equiv \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, sería:

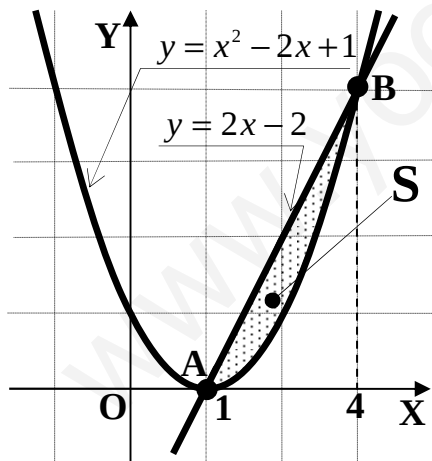
$$r \equiv \frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - 1}{3 - 1} \quad ;; \quad 2y = 4x - 4 \quad ;; \quad \underline{r \equiv y = 2x - 2}.$$

Los puntos de intersección de la curva y la recta son:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 \quad ;; \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad ;;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow \underline{B(3, 4)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{A(1, 0)} \end{cases}$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



$$S = \int_1^3 [(2x - 2) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_1^3 (2x - 2 - x^2 + 2x - 1) \cdot dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3} u^2 = S}}$$

BLOQUE E

Cuestión E.- A una velada de baile asistieron un total de 20 personas. La primera chica bailó con 7 muchachos, la segunda con 8 y así sucesivamente, hasta la última que bailó con todos los muchachos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

Una forma de resolver este ejercicio es la que sigue:

Por el enunciado del problema, el mínimo número de muchachos es 8 y el número máximo de chicas es 12. Procediendo por tanteo se plantean los siguientes supuestos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Muchachos} \rightarrow 9 \\ \text{Chicas} \rightarrow 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ baila con } 7 \\ 2^{\text{a}} \text{ " " } 8 \\ 3^{\text{a}} \text{ " " } 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \text{ chicas} \Rightarrow \underline{\text{NO}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Muchachos} \rightarrow 10 \\ \text{Chicas} \rightarrow 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ baila con } 7 \\ 2^{\text{a}} \text{ " " } 8 \\ 3^{\text{a}} \text{ " " } 9 \\ 4^{\text{a}} \text{ " " } 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \text{ chicas} \Rightarrow \underline{\text{NO}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Muchachos} \rightarrow 11 \\ \text{Chicas} \rightarrow 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ baila con } 7 \\ 2^{\text{a}} \text{ " " } 8 \\ 3^{\text{a}} \text{ " " } 9 \\ 4^{\text{a}} \text{ " " } 10 \\ 5^{\text{a}} \text{ " " } 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \text{ chicas} \Rightarrow \underline{\text{NO}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Muchachos} \rightarrow 12 \\ \text{Chicas} \rightarrow 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ baila con } 7 \\ 2^{\text{a}} \text{ " " } 8 \\ 3^{\text{a}} \text{ " " } 9 \\ 4^{\text{a}} \text{ " " } 10 \\ 5^{\text{a}} \text{ " " } 11 \\ 6^{\text{a}} \text{ " " } 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 \text{ chicas} \Rightarrow \underline{\text{NO}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Muchachos} \rightarrow 13 \\ \text{Chicas} \rightarrow 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ baila con } 7 \\ 2^{\text{a}} \text{ " " } 8 \\ 3^{\text{a}} \text{ " " } 9 \\ 4^{\text{a}} \text{ " " } 10 \\ 5^{\text{a}} \text{ " " } 11 \\ 6^{\text{a}} \text{ " " } 12 \\ 7^{\text{a}} \text{ " " } 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \text{ chicas} \Rightarrow \underline{\text{SI}}$$

El número de muchachos era de 13 y el de chicas, 7.

Problema E.- El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0'01x^2 + 3'6x - 180$.

a) Determinar los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

b) Determinar los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

a)

El beneficio será máximo cuando su derivada se anule, es decir:

$$B'(x) = -0'02x + 3'6 \quad ; \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -0'02x + 3'6 = 0 \quad ; \quad 2x = 360 \quad ; \quad \underline{x = 180}$$

$$B(180) = -0'01 \cdot 180^2 + 3'6 \cdot 180 - 180 = -324 + 648 - 180 = \underline{144 = f(180)}$$

El beneficio máximo se consigue cuando se venden 180 kilos.

Justificación de que se trata de un máximo:

$$\underline{B''(x) = -0'02 < 0 \Rightarrow \text{Máximo, } \underline{\underline{c.q.j.}}}$$

b)

La representación gráfica del beneficio es una parábola cóncava cuyo vértice es el punto máximo obtenido en el apartado anterior: V(180, 144).

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola son:

$$-0'01x^2 + 3'6x - 180 = 0 \quad ; \quad x^2 - 360x + 18000 = 0$$

$$x = \frac{360 \pm \sqrt{129600 - 72000}}{2} = \frac{360 \pm 240}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 300 \\ x_2 = 60 \end{cases}$$

La cantidad máxima que debe venderse para no tener pérdidas es de 300 kilos

Nota: Es interesante observar que si se venden menos de 60 kilos también hay pérdidas, o sea, que el beneficio se produce cuando las ventas son mayores de 60 kilos y menores de 300 kilos.
