PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

SEPTIEMBRE (JULIO) – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sabiendo que $a \cdot d - b \cdot c = 3$, calcular, de forma razonada, los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & d & 0 \end{pmatrix} ;; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & d & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -(a \cdot d - b \cdot c) = \underline{\underline{-3 = |A|}}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & d & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & a \\ 0 & d & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = -(b \cdot c - a \cdot d) = a \cdot d - b \cdot c = \underline{\underline{3 = |B|}}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ 0 & a & b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -(b \cdot c - a \cdot d) = a \cdot d - b \cdot c = \underline{\underline{3 = |C|}}$$

****

Problema A.- Discutir la compatibilidad del sistema de ecuaciones $S \equiv \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$, en función del parámetro a.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 2 - 3a - 3 + a - 2a^2 = -2a^2 - a - 1 = 0 \;;;\; 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = \frac{1}{2}} \\ \underline{a_2 = -1} \end{cases}$$

$$Para \; \begin{Bmatrix} a \neq \frac{1}{2} \\ a \neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 3 = n^{o} \; incóg. \Rightarrow \underline{\underline{Compatible \; \det er \min ado}}$$

$$\underline{Para \; a = \frac{1}{2}} \; resulta \; M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}. \; El \; rango \; de \; M' \; es \; el \; siguiente:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + \frac{3}{2} - 3 - 1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M' = 3}$$

$$\underline{Para \; a = -1} \; resulta \; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \; El \; rango \; de \; M' \; es \; el \; siguiente:$$

$$\{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 3 - 3 - 1 + 4 = 8 - 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M' = 3}$$

$$Para \ \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ Rango \ \ M = Rango \ \ M' = 2 < n^{o} \ incóg. \Rightarrow \underline{\underline{Compatible \ \ Indeterminado}}$$

****

<u>**BLOQUE B**</u>

Cuestión B.- Determinar las posiciones relativas de los planos $\pi_1 \equiv x + ay + z = \alpha + 2$ y $\pi_2 \equiv x + y + \alpha z = 3$, según los diferentes valores de α.

Vamos a hacer el estudio por los vectores normales a los dos planos.

Un vector normal al plano π_1 es $\overrightarrow{n_1} = (1,\ a,\ 1)$.

Un vector normal al plano π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 1,\ a)$.

Para que los planos sean paralelos es necesario que los vectores normales sean linealmente dependientes (paralelos) teniendo que cumplirse que:

$$\frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{1}{\alpha} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

Para $\alpha = 1$ los planos son paralelos o coincidentes, según que la relación entre sus términos independientes sea diferente o igual, respectivamente, a la relación de las componentes de los vectores; veamos:

$$\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\alpha + 2}{3} = 1 \Rightarrow \underline{Se\ \ satistace} \;\Rightarrow\; \underline{Conclusión}: \begin{cases} \underline{\underline{\alpha = 1 \rightarrow Los\ \ planos\ \ son\ \ coincidentes}} \\ \\ \underline{\underline{\alpha \neq 1 \rightarrow Los\ \ planos\ \ son\ \ secantes}} \end{cases}$$

****

Problema B.- Encontrar unas ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

¿Existe algún valor de s tal que el punto P(-3, s, s) pertenezca a la recta r? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como negativo.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x + y &= -\lambda \\ x - y &= -2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x = -3\lambda \;;;\; \underline{x = -\lambda}$$

$$x - y = -2\lambda \;;;\; y = x + 2\lambda = -\lambda + 2\lambda = \underline{\lambda = y}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

Si el punto P pertenece a r tiene que satisfacer su ecuación:

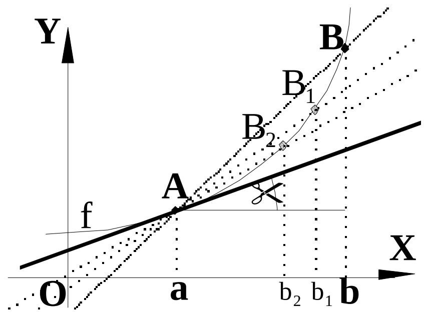
$$P(-3,\ s,\ s) \equiv P(-\lambda,\ \lambda,\ \lambda) \Rightarrow \underline{\lambda = 3}$$

<u>El único punto que satisface la condición es P(-3, 3, 3).</u>

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Definir el concepto de la recta tangente a una función derivable en un punto. Describir brevemente el significado geométrico de la recta tangente. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 e^x + \dfrac{x^3}{x^2+1}$ en el punto x = 1.



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse indefinidamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>La derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

La pendiente en el caso que nos ocupa es:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x + \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = x\,e^x(2-x) + \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= x\,e^x(2-x) + \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \underline{x\,e^x(2-x) + \frac{x^4(x^2+3)}{(x^2+1)^2}} = f'(x)$$

$$m = f'(1) = 1 \cdot e^1 (2-1) + \frac{1^4 \cdot (1^2+3)}{(1^2+1)^2} = e + \frac{4}{4} = \underline{e+1 = m}$$

El punto de tangente es: $f(1) = 1^2 \cdot e^1 + \frac{1^3}{1^2+1} = e + \frac{1}{2} = \frac{2e+1}{2} \Rightarrow \underline{P\left(1,\ \frac{2e+1}{2}\right)}$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la tangente o pendiente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{2e+1}{2} = (e+1)(x-1) \ ;; \ 2y - (2e+1) = 2(e+1)(x-1) \ ;;$$

$$2y - 2e - 1 = 2(ex - e + x - 1) \ ;; \ 2y - 2e - 1 = 2ex - 2e + 2x - 2 \ ;;$$

$$\underline{\underline{\text{Recta tangente}: \ t \equiv 2(e+1)x - 2y - 1 = 0}}$$

****

Problema C.- Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Describir el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de f. Trazar un esquema de su gráfica.

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 1} \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1,\ 1\}}}$$

La función pasa por el origen de coordenada: f(0) = 0.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \underline{\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo, solamente estudiaremos el numerador.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ \underline{x < 0} \ \Rightarrow \ Creciente \Rightarrow (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 0)}} \\ \\ \underline{\underline{f'(x) < 0 \ \Rightarrow \ x > 0 \ \Rightarrow \ Decreciente \Rightarrow (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)}} \end{cases}$$

Los máximos y mínimos posible son:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \ ;; \ \underline{x = 0}$$

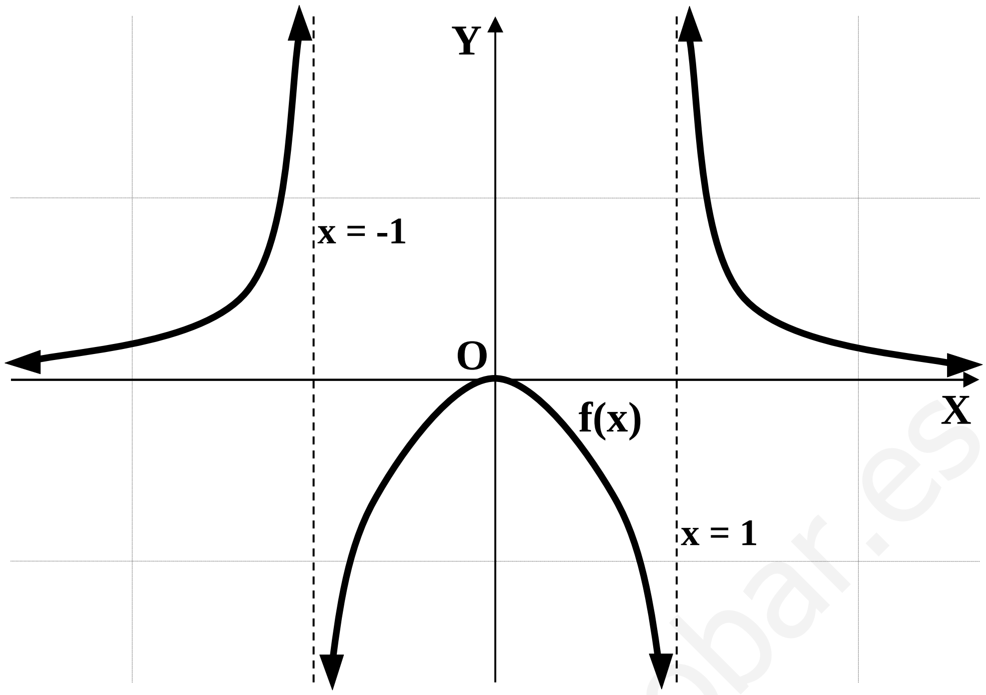
$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 + 2x \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2 \cdot (x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^2 + 2 + 8x^2}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3} = \underline{\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = f''(x)}$$

$$f''(0) = \frac{2(0+1)}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo \Rightarrow O(0,\ 0)}}$$

No existe ningún valor real de x que anule la segunda derivada, por lo cual no tiene puntos de inflexión.

Teniendo en cuenta que se trata de una función par, f(x) = f(-x), la representación aproximada de la función es la siguiente:



****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la primitiva siguiente: $I = \int \frac{2x + A}{x^2 + 4} \cdot dx$ en función del valor de A.

$$I = \int \frac{2x + A}{x^2 + 4} \cdot dx = \int \frac{2x}{x^2 + 4} \cdot dx + A \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \underline{I_1 + I_2 = I} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{2x}{x^2 + 4} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = L\,t + C = \underline{L\left(x^2 + 4\right) + C = I_1}$$

$$I_2 = A \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{4} A \cdot \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4} + 1} = \frac{1}{4} A \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ dx = 2\,dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} A \cdot \int \frac{2dt}{t^2 + 1} =$$

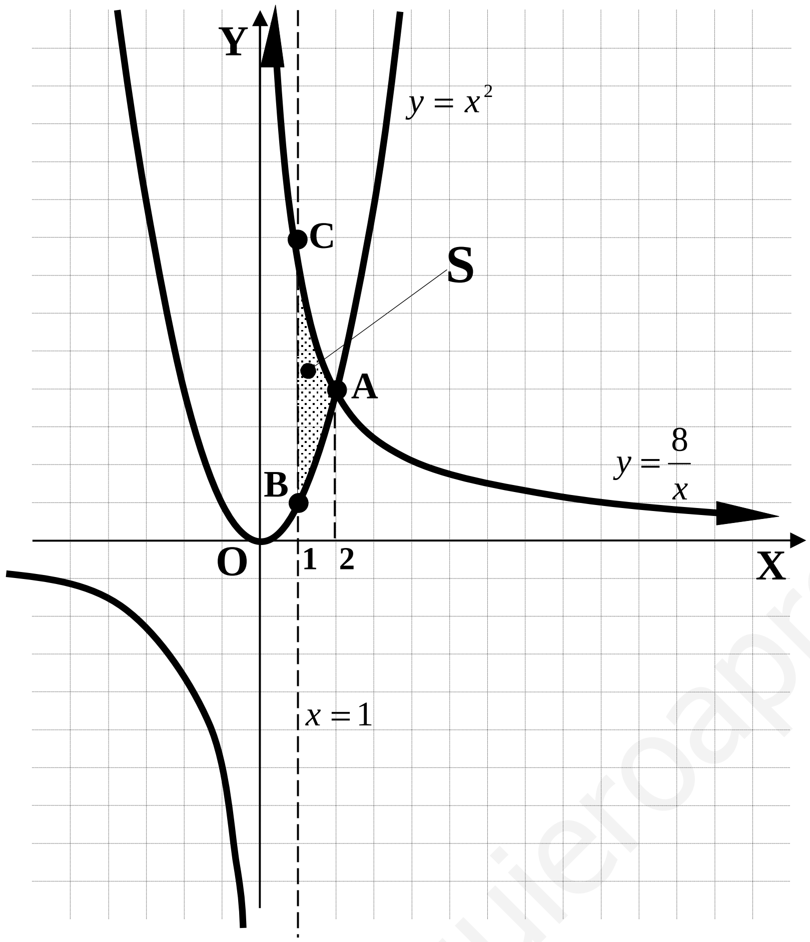
$$= \frac{A}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{A}{2} \cdot arc\ \ tag\ \ t + C = \underline{\frac{A}{2} \cdot arc\ \ tag \frac{x}{2} + C = I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos para I_1 e I_2, resulta:

$$I = I_1 + I_2 = \underline{\underline{L\left(x^2 + 4\right) + \frac{A}{2} \cdot arc\ \ tag \frac{x}{2} + C = I}}$$

****

Problema D.- Se considera el recinto finito del plano limitado por la recta x = 1, la parábola $y = x^2$ y la curva $y = \frac{8}{x}$. Trazar un esquema del recinto y calcular su área.



El punto de corte de la parábola y la curva es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \frac{8}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \frac{8}{x} \;;;\; x^3 = 8 \;;;$$

$$x = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 4)}$$

El punto de corte de la parábola y la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{B(1,\ 1)}$$

El punto de corte de la curva y la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{8}{x} \\ x = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{C(1,\ 8)}$$

$$S = \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - x^2\right) \cdot dx = \int_1^2 \frac{8}{x} \cdot dx = \int_1^2 x^2 \cdot dx = 8\left[L\,x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 8\left(L\,2 - L\,1\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) =$$

$$= 8\left(L\,2 - 0\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 8\,L\,2 - \frac{7}{3} = \underline{\underline{\frac{24\,L\,2 - 7}{3}\ u^2 \cong 3'21\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Encontrar todas las matrices cuadradas de orden dos que conmutan respecto al producto con la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Sean las matrices pedidas de la forma $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Tiene que cumplirse que $A\cdot M=M\cdot A$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2a+b\\ c & 2c+d\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a+2c=a\rightarrow \underline{c=0}\\ b+2d=2a+b\rightarrow \underline{a=d}\\ d=2c+d\rightarrow \underline{c=0}\end{array}\right\}$$

Las matrices pedidas son de la forma: $\underline{\underline{M=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix},\ \forall a,b\in R}}$

****

Problema E.- En una carrera de motocicletas, tres de ellas salen simultáneamente. La segunda hace 15 kilómetros por hora menos que la primera y 3 kilómetros por hora más que la tercera, y llega 12 minutos después a la meta que la primera y 3 minutos antes que la tercera. Determinar:

a) La longitud de la carrera.

b) La velocidad de cada motocicleta.

En primer lugar tendremos en cuenta que si la velocidad se expresa en kilómetros por hora, el tiempo debe expresarse en horas.

Siendo x e y la velocidad en metros por segundo y el tiempo empleado por la primera motocicleta, respectivamente, podemos expresar las velocidades y los tiempos de las otras motos como se expresa en la tabla siguiente:

	$Velocidad \ \left(Km/h\right)$	$Tiempo \ \left(horas\right)$
Moto Primera	x	y
Moto Segunda	$x-15$	$y+\frac{12}{60}=y+\frac{1}{5}$
Moto Tercera	$x-15-3=x-18$	$y+\frac{12}{60}+\frac{3}{60}=y+\frac{1}{4}$

Como es espacio que recorren las tres motocicletas es el mismo para todas y siendo el espacio (E) es el producto de la velocidad por el tiempo, podemos expresar:

$$\left.\begin{array}{l}(x-15)\left(y+\frac{1}{5}\right)=x\cdot y\\(x-18)\left(y+\frac{1}{4}\right)=x\cdot y\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x\cdot y+\frac{1}{5}x-15y-3=x\cdot y\\x\cdot y+\frac{1}{4}x-18y-\frac{9}{2}=x\cdot y\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}x-15y=3\\\frac{1}{4}x-18y=\frac{9}{2}\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x-72y=18\\x-75y=15\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x-72y=18\\-x+75y=-15\end{array}\right\}\Rightarrow 3y=3\ ;;\ \underline{y=1}\ ;;\ x-72y=18\ ;;\ x-72=18\ ;;\ \underline{x=90}$$

a)

La longitud de la carrera es de 90 kilómetros.

b)

Las velocidades de las motos son 90, 75 y 72 Km/h, respectivamente.

****