PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A. Se sabe que la matriz de dos filas y dos columnas A, satisface la ecuación matricial que sigue: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula razonadamente la matriz A.

Haciendo operaciones:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ es la siguiente, aplicando el Método de Gauss-Jordan:

$$(M / I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 5F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{8} F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$

Según lo anterior, la ecuación a resolver es: $A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Multiplicando por la derecha por M^{-1}, resulta: $A \cdot M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$;; $A \cdot I = \underline{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot M^{-1}}$.

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de M^{-1} obtenido:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{7}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{21}{8}+\frac{5}{8} & \frac{9}{8}-\frac{1}{8}\\ -\frac{28}{8}+\frac{15}{8} & \frac{12}{8}-\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -\frac{13}{8} & \frac{9}{8}\end{pmatrix}=A}}$$

****

Problema A. Discutir la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 2\alpha + 1 \\ x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + (\alpha - 1)z = \alpha + 1 \end{cases}$ en función del parámetro α.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 2\alpha + 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 3 - 4 + 8 - 8 - 6 + 2\alpha - 2 = 5\alpha - 15 = 5(\alpha - 3) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \alpha \neq 3 \;\Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incógnitas \Rightarrow Compatible \; \det er \min ado}}$$

$$Para \;\; \alpha = 3 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 14 - 8 - 28 + 6 + 8 = 26 - 50 = -24 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \alpha = 3 \;\Rightarrow Rango \;\; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; M' = 3 \;\;\Rightarrow\;\; Incompatible}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B. Sean A(2, 2, 1) y B(4, u, v) dos puntos del espacio. Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto del plano $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$. Hallar de forma razonada los valores de u, v y D.

Un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$.

El vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ u,\ v) - (2,\ 2,\ 1) = (2,\ u-2,\ v-1)$ tiene que ser linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$, por lo cual, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2}{2} = \frac{u-2}{-1} = \frac{v-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2} = \frac{u-2}{-1} \ ;;\ -1 = u-2 \ ;;\ \underline{\underline{u=1}} \\ \frac{2}{2} = \frac{v-1}{1} \ ;;\ 1 = v-1 \ ;;\ \underline{\underline{v=2}} \end{cases}$$

El punto B resulta ser B(4, 1, 2).

El punto medio de A y B es: $\begin{cases} A(2,\ 2,\ 1) \\ B(4,\ 1,\ 2) \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{M\left(3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)}$.

El punto M pertenece al plano $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$, por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ M\left(3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + D = 0 \Rightarrow \underline{\underline{D = -6}}$$

****

Problema B. Hallar la ecuación general de un plano π que contenga al origen de coordenadas y a la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+2z=1 \end{cases}$. ¿Es único dicho plano? Razonar la respuesta.

Si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos.

Para obtener dos puntos de la recta r con facilidad la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=1-3\lambda \\ x+3y=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x-2y=-1+3\lambda \\ x+3y=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=\lambda}$$

$$x+2y=1-3\lambda \;\;;;\;\; x=1-3\lambda-2y=1-3\lambda-2\lambda=\underline{1-5\lambda=x} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Dos puntos de r son: $\begin{cases} \lambda=1 \rightarrow \underline{A(-4,\ 1,\ 1)} \\ \\ \lambda=-1 \rightarrow \underline{B(6,\ -1,\ -1)} \end{cases}.$

Los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}=(-4,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OB}=(6,\ -1,\ -1)$ son directores del plano π pedido.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \;\;;;\;\; -x+6y+4z-6z+x-4y=0 \;\;;;\;\; 2y-2z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv y-z=0}}$$

<u>El plano es único porque por tres puntos no alineados solamente pasa un plano.</u>

****

BLOQUE C

Cuestión C. Sean p y q dos números positivos cuya suma vale 20. Hallar razonadamente el valor de p y q para que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

$$p+q=20\ \ ;;\ \ \underline{p=20-q}$$

$$P=p\cdot q^2=(20-q)\cdot q^2=\underline{20q^2-q^3=P}$$

Para que el producto pedido sea máximo tiene que ser nula su derivada:

$$P'=40q-3q^2=q(40-3q)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} q_1=0\ \ \rightarrow\ \ Carece\ \ de\ \ sentido\ \ lógico \\ \underline{q_2=\frac{40}{3}} \end{cases}$$

$$p=20-\frac{40}{3}=\frac{60-40}{3}=\underline{\frac{20}{3}=p}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ números\ \ son\ \ p=\frac{20}{3}\ \ y\ \ q=\frac{40}{3}}}$$

****

Problema C. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$. Representar la gráfica de f.

Una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando es negativa.

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right)=0 \;\Rightarrow\; x^2-x-2=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=2}$$

Por ser f(x) una función de tipo polinómico, su dominio es R, por lo cual las soluciones anteriores determinan los intervalos $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$, que son alternativamente crecientes y decrecientes.

Estudiamos uno de ellos, por ejemplo $(-1,\ 2)$, en el cual se encuentra el valor más sencillo de x = 0:

$$f'(x)=6x^2-6x-12 \;\Rightarrow\; f'(0)=-12<0 \;\Rightarrow\; \textit{Decreciente.}$$

$$\underline{\underline{\textit{Creciente}: \ f'(x)>0 \;\Rightarrow\; (-\infty,\ -1)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Decreciente}: \ f'(x)<0 \;\Rightarrow\; (-1,\ 2)}}$$

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es necesario que la derivada sea cero en ese punto.

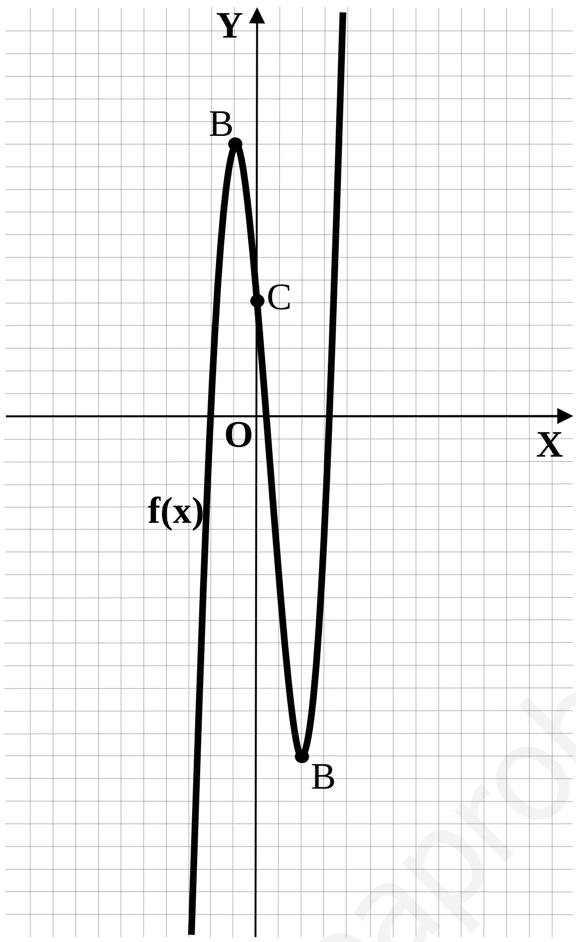
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada:

$$f''(x)=12x-6 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(-1)=12\cdot(-1)-6=-12-6=-18<0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo para } x=-1} \\ \\ f''(2)=12\cdot 2-6=24-6=18>0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo para } x=2} \end{cases}$$

$$f(-1)=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2-12\cdot(-1)+5=-2-3+12+5=12 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo}: \ A(-1,\ 12)}}$$

$$f(2)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2-12\cdot 2+5=16-12-24+5=-15 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mínimo}: \ B(2,\ -15)}}$$

Teniendo en cuenta que la función corta al eje de ordenadas en el punto C(0, 5), y con los datos obtenidos se puede representar, con cierta aproximación, la gráfica de la función, que es la siguiente:


Y
B
C
O
X
f(x)
B

****

BLOQUE D

Cuestión D. Calcular la primitiva $I=\int x\cdot\cos(ax+b)\cdot dx$, donde a y b son dos números reales.

$$I=\int x\cdot\cos(ax+b)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=u \;\rightarrow\; du=dx \\ \cos\,(ax+b)\cdot dx=dv \;\rightarrow\; v=\frac{1}{a}sen(ax+b) \quad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(*)\ \int\cos(ax+b)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} ax+b=t \\ dx=\frac{1}{a}dt \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a}\int\cos t\cdot dt=\frac{1}{a}sen\ t=\frac{1}{a}sen(ax+b)$$

$$\Rightarrow I=x\cdot\frac{1}{a}sen(ax+b)-\int\frac{1}{a}\cdot sen(ax+b)\cdot dx=\frac{x}{a}sen(ax+b)-\frac{1}{a}\int sen(ax+b)\cdot dx \quad (**)$$

$$(**)\ \int sen(ax+b)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} ax+b=t \\ dx=\frac{1}{a}dt \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a}\int sen\ t\cdot dt=-\frac{1}{a}\cos\ t=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$I=\frac{x}{a}sen(ax+b)+\frac{1}{a^2}\cos(ax+b)+C=\underline{\underline{\frac{1}{a^2}\left[x\,sen(ax+b)+\cos(ax+b)\right]+C=I}}$$

****

Problema D. Se considera el recinto del plano limitado por las rectas y = 4x, y = 8 – 4x y la curva $y = 2x - x^2$, y situado en el primer cuadrante. Trazar un esquema gráfico del recinto y calcular su área mediante cálculo integral.

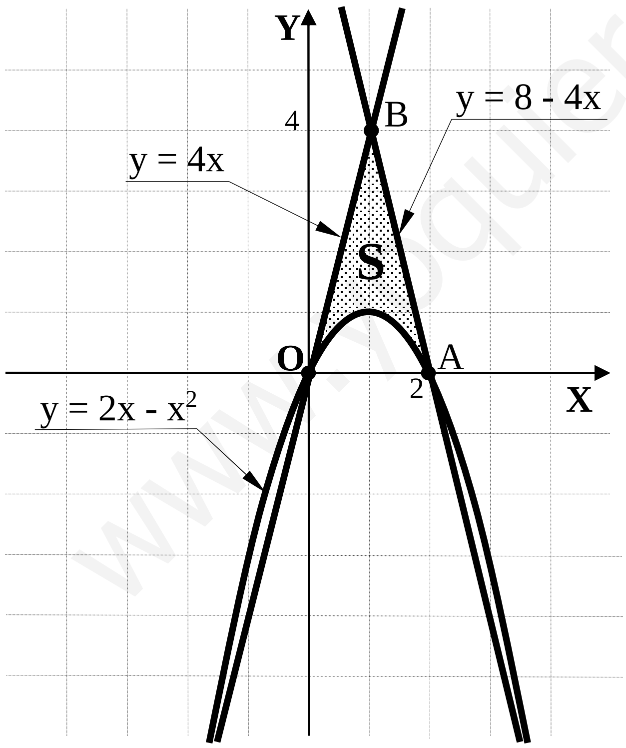
Los puntos de corte de la curva con las rectas se obtienen de los sistemas que forma la curva con cada una de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - x^2 \\ y = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - x^2 = 4x \;\;;;\;\; x^2 + 2x = 0 \;\;;;\;\; x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \;\rightarrow\; \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = -2 \;\rightarrow\; \underline{P(-2,\ -8)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x - x^2 \\ y = 8 - 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - x^2 = 8 - 4x \;\;;;\;\; x^2 - 6x + 8 = 0 \;\;;;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \;\rightarrow\; \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = 4 \;\rightarrow\; \underline{Q(4,\ -8)} \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas se obtiene de la igualación de sus ecuaciones:



$$\left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 8 - 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 8 - 4x \;\;;;\;\; 8x = 8 \;\;;;$$

$$x = 1 \Rightarrow \underline{B(1,\ 4)}$$

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura.

Es interesante observar que las dos rectas son simétricas con respecto a la *recta* x = 1 y que la curva también es simétrica con respecto a la misma recta. Esto facilita la obtención del área pedida, que es la siguiente:

$$S = 2\int_0^1 \left[4x - \left(2x - x^2\right)\right] dx = 2\int_0^1 \left(x^2 + 2x\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E. Se tiene una balanza de dos platillos y con tres tipos de pesas: A, B y C. Si se colocan 4 pesas del tipo A en un platillo y 5 pesas del tipo B en el otro, la balanza quede equilibrada. Ocurre lo mismo si en un platillo se colocan dos pesas del tipo B y una pesa del tipo A y en el otro platillo dos pesas del tipo C. ¿Cómo se inclina la balanza si se colocan dos pesas del tipo C y dos pesas del tipo B en un platillo y 4 pesas del tipo A en el otro? Justifica la respuesta.

Llamando x, y, z a los pesos de las pesas de tipo A, B y C, respectivamente, resulta el sistema de ecuaciones siguiente, en cuya última expresión desconocemos el signo que separa los dos términos:

$$\left.\begin{array}{l} 4x=5y \\ 2y+x=2z \\ 2z+2y \ ? \ 4x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x=5y \\ 2y+x=2z \\ z+y \ ? \ 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=\dfrac{4x}{5} \\ \rightarrow z=y+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{8x+5x}{10}=\dfrac{13x}{10} \end{array} \Rightarrow \frac{13x}{10}+\frac{4x}{5} \ ? \ 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13x}{10}+\frac{4x}{5}=\frac{13x+8x}{10}=\frac{21x}{10}=\underline{2'1x>2x}$$

La balanza se inclina hacia el lado de las pesas C y B.

****

Problema E. Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x<-1 \\ x^2+3 & si \quad x\geq -1 \end{cases}$ es derivable en el punto $x=-1$. Hallar razonadamente los valores de a y b.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax+b)=\underline{-a+b} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3)=\underline{4}=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{-a+b=4} \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x<-1 \\ 2x & si \quad x\geq -1 \end{cases} \Rightarrow \quad f'(-1)=\begin{cases} a & si \quad x<-1 \\ -2 & si \quad x\geq -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{\underline{a=-2}}$$

Sustituyendo en (1):

$$-a+b=4 \quad ;; \quad -(-2)+b=4 \quad ;; \quad 2+b=4 \quad ;; \quad \underline{\underline{b=2}}$$

****