PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada pregunta se valorará entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Obtener las matrices A y B que cumplen las condiciones:

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 9A+6B=\begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \\ 4A-6B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 13A=\begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \;;;\; 2B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

****

Problema A.- Estudiar la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = -\beta \\ 3x + \beta y + z = \beta \end{cases}$ en función del parámetro β. Resolver es sistema para β = 0.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & \beta & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -\beta \\ 3 & \beta & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de β es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 2\beta + 12 + 2 - 2\beta = 12 - 4\beta = 0 \;\; ;; \;\; 3 - \beta = 0 \;\; ;; \;\; \underline{\beta = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \beta \neq 3 \;\Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

$$Para \;\; \beta = 3 \;\; \Rightarrow \;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \beta = 3 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; In\det er\min ado}}$$

Para β = 0 el sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$.

De la tercera ecuación se deduce que $z = -3x$. Sustituyendo en las otras dos:

$$\begin{cases} x - y - (-3x) = 6 & 4x - y = 6 \\ 2x + 4y + 2 \cdot (-3x) = 0 & -4x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y = 6 \;\; ;; \;\; \underline{y = 2} \;\; ;; \;\; 4x - y = 6 \;\; ;; \;\; 4x - 2 = 6 \;\; ;;$$

$$4x = 8 \;\; ;; \;\; \underline{x = 2} \;\; ;; \;\; x = -3x = \underline{-6 = z}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -6 \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sea la recta de ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, y sea el plano de ecuación general $\pi \equiv x + 3y = 0$. Calcular de forma razonada la distancia entre la recta r y el plano π.

En primer lugar vamos a comprobar que la recta y el plano son paralelos; en otro caso se cortarían en un punto y la distancia sería cero.

El vector director de r es $\vec{v} = (-3,\ 1,\ -1)$ y el vector normal de π es $\vec{n} = (1,\ 3,\ 0)$.

Para que r y π sean paralelos, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}$ tienen que ser perpendiculares, es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \ ;;\ (-3,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ 3,\ 0) = -3 + 3 - 0 = 0 \ \rightarrow \ \underline{r \ \ y \ \ \pi \ \ son \ \perp, \ \ c.q.c.}$$

La distancia de r a π es equivalente a la distancia de cualquier punto de la recta al plano; considerando el punto de la recta P(1, 2, 1) y teniendo en cuenta que la distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula $d(P,\ \pi) = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0}{\pm\sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{1+6}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{\sqrt{7} \ \ unid. = d(r,\ \pi)}}$$

****

Problema B.- Dados los puntos A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, a), hallar la ecuación del plano π_a que contiene a los tres puntos. ¿Existe algún valor de a tal que dicho plano contenga al punto P(1, 1, 1)? Razonar la contestación.

Los puntos A, B y C determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ a) - (0,\ 2,\ 0) = (0,\ -2,\ a)$$

El plano π_a que determinan los puntos A, B y C puede determinarse por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y, por ejemplo, el punto B:

$$\pi_a\left(B;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2ax + 4z + 2a(y-2) = 0\ ;;\ ax + 2z + a(y-2) = 0\ ;;$$

$$ax + 2z + ay - 2a = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi_a \equiv ax + ay + 2z - 2a = 0}}$$

Para que el plano π_a contenga al punto P(1, 1, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_a \equiv ax + ay + 2z - 2a = 0 \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ a \cdot 1 + a \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2a = 0\ ;;\ a + a + 2 - 2a = 0\ ;;\ \underline{2 = 0\ ??}$$

<u>No existe ningún valor real de a para que el punto P pertenezca al plano π.</u>

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ un polinomio de tercer grado del que se sabe que f(0) = 1, f'(0) = 2 y que tiene dos extremos relativos en x = 1 y en x = 2. Calcular los valores de A, B, C y D y determinar razonadamente si los extremos son máximo o mínimo.

$$f(0)=1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D=1}}$$

$$f'(0)=2 \;\Rightarrow\; f'(x)=3Ax^2+2Bx+C \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C=2}}$$

$$Extremos\;\; relativos\;\; para\;\; \left\{\begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} f'(1)=0 \;\Rightarrow\; 3A+2B+2=0 \\ f'(2)=0 \;\Rightarrow\; 12A+4B+2=0 \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} 3A+2B=-2 \\ 6A+2B=-1 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} -3A-2B=2 \\ 6A+2B=-1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; 3A=1 \;;;\; \underline{\underline{A=\frac{1}{3}}} \;;;\; 3A+2B=-2 \;;;\; 3\cdot\frac{1}{3}+2B=-2 \;;;\; 2B=-3 \;;;\; \underline{\underline{B=-\frac{3}{2}}}$$

El polinomio resulta ser $\underline{f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1}$.

Veamos si los extremos relativos son máximo o mínimo, para lo cual recurrimos a la segunda derivada; si resulta positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y si es negativa, de un máximo relativo:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1 \;;;\; f'(x)=x^2-3x+2=0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=2 \end{matrix}\right\} \;;;\; f''(x)=2x-3$$

$$f''(1)=2\cdot 1-3=2-3=-1<0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo\;\; relativo\;\; para\;\; x=1}}$$

$$f''(2)=2\cdot 2-3=4-3=1>0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo\;\; relativo\;\; para\;\; x=2}}$$

****

Problema C.- Sea $f(x)=x^2e^{-x}+H$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Hallar el valor de H para que el valor de f en su máximo sea igual a 1.

La función está definida para cualquier valor real de x.

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}=\frac{x^2}{e^x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x\cdot e^x(2-x)}{e^{2x}}=\underline{\frac{x(2-x)}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x(2-x)=0\ \Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=0}\\ \\ \underline{x_2=2}\end{cases}$$

Los valores que anulan la primera derivada de la función determinan los tres siguientes intervalos: , en los cuales el valor de la derivada es, alternativamente, positivo y negativo.

Considerando el valor sencillo x = 1, perteneciente al intervalo (0, 2), resulta:

$$f'(1)=\frac{1\cdot(2-1)}{e^1}=\frac{1}{e}>0\ \Rightarrow\ \underline{Creciente}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ (-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Crecimiento\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ (0,\ 2)}}$$

Para que exista un máximo relativo debe anularse la primera derivada y la segunda derivada tiene que ser negativa para ese valor:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^x-x(2-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^2}{e^x}=\underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\quad para\quad x=0}$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\quad relativo\quad para\quad x=2}$$

Según lo pedido tiene que ser $f(2)=1$:

$$f(2)=2^2e^{-2}+H=1\ ;;\ H=1-\frac{4}{e^2}=\underline{\underline{\frac{e^2-4}{e^2}=H}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la primitiva $I = \int x^2 \, sen(2x) \, dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

La integral dada tiene que resolverse por el método de "por partes", que está basado en la diferencial de un producto de funciones: $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Sabiendo que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

La expresión anterior se conoce como la del método de integración "por partes".

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I = \int x^2 \cdot sen\ (2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ sen\ (2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\dfrac{1}{2} \cos\ (2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos\ (2x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cos\ (2x) \cdot 2x \cdot dx = -\frac{x^2}{2} \cos\ (2x) + \int x \cdot \cos\ (2x) \cdot dx =$$

$$= \underline{-\frac{x^2}{2} \cos\ (2x) + I_1 = I} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int x \cdot \cos\ (2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos\ (2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \dfrac{1}{2}\ sen\ (2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2}\ sen\ (2x) - \int \frac{1}{2}\ sen\ (2x) \cdot dx = \frac{x}{2}\ sen\ (2x) - \frac{1}{2} \int sen\ (2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2}\ sen\ (2x) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos\ (2x) = \underline{\frac{x}{2}\ sen\ (2x) + \frac{1}{4} \cos\ (2x) = I_1}$$

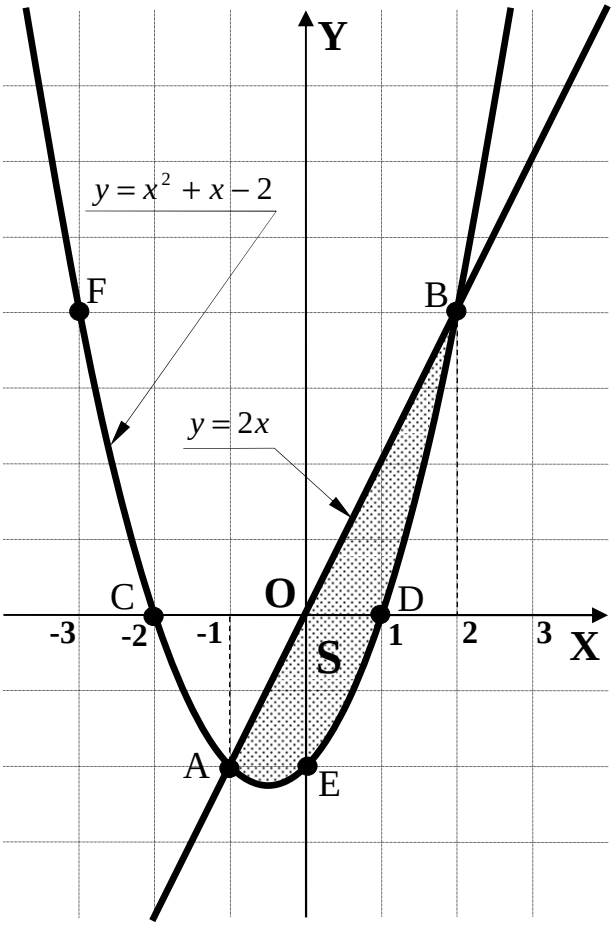
Sustituyendo en valor obtenido de I_1 en el valor de I dado en (*), queda:

$$I = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\,sen\,(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C = \frac{1}{4}\left(1 - 2x^2\right)\cos(2x) + \frac{x}{2}\,sen\,(2x) + C$$

$$\underline{\underline{I = \int x^2\,sen(2x)\,dx = \frac{1}{4}\left[\left(1 - 2x^2\right)\cos(2x) + 2x \cdot sen\,(2x)\right] + C}}$$

****

Problema D.- Trazar un esquema de la región del plano limitada por la curva de ecuación $y = x^2 + x - 2$ y la recta y = 2x. Calcular el área de dicha región.



Los puntos de corte de la parábola con la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^2 - x - 2 = 0 \;\; ;;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \;\rightarrow\; \underline{A(-1,\; -2)} \\ x_2 = 2 \;\rightarrow\; \underline{B(2,\; 4)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^2 + x - 2 = 0 \;\; ;;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \;\rightarrow\; \underline{C(-2,\; 0)} \\ x_2 = 1 \;\rightarrow\; \underline{D(1,\; 0)} \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; \underline{E(0,\; -2)}$$

Otro punto que se deduce fácilmente es F(-3, 4), que favorece la representación gráfica de la situación, que es la de la figura adjunta.

Las ordenadas correspondientes a la parábola son iguales o menores que los de la recta en el intervalo correspondiente a la superficie S que debemos calcular.

$$S = \int_{-1}^{2} 2x - \left[\left(x^2 + x - 2\right)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(2x - x^2 - x + 2\right) \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\; u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Sea S la función que a cada número le hace corresponder la suma de sus dígitos, por ejemplo S(2009) = 2 + 0 + 0 + 9 = 11. Calcular el valor de $S(10^{100} – 100)$.

Para facilitar la compresión de la solución consideramos un caso más sencillo, por ejemplo: $S(10^6 – 100)$; sería:

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ -\quad 100 \\ \hline 999900 \end{array}$$

Observemos que el número resultante está formado por (6 – 2) = 4 nueves seguidos de dos ceros.

La función $S(10^{100} – 100)$ está formada por un número de (100 – 2) = 98 nueves seguidos de dos ceros, o sea que:

$$\underline{S(10^{100} – 100) = 98 \cdot 9 = 882}$$

****

Problema E.- Unos cuantos amigos toman el mismo menú y han de pagar 60 euros entre todos. Pero, dos de ellos no llevan dinero, por lo que los otros los invitan, teniendo que aumentar su aportación en 8 euros cada uno. ¿Cuántos amigos son? ¿Cuánto cuesta cada menú?

Sean x el número de amigos al principio e y el precio del menú.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 60 \\ (x-2)\cdot(y+8) = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot y = (x-2)(y+8) \;;;\; x\,y = x\,y + 8x - 2y - 16 = 0 \;;;\; 8x - 2y = 16 \;;;$$

$$4x - y = 8 \;;;\; \underline{y = 4x - 8}$$

Sustituyendo en la expresión x · y = 60:

$$x \cdot (4x-8) = 60 \;;;\; 4x^2 - 8x - 60 = 0 \;;;\; x^2 - 2x - 15 = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 5 \;;;\; x_2 = -3 \; (carece \;\; de \;\; lógica)$$

$$\underline{x = 5} \;;;\; y = 4x - 8 = 20 - 8 = \underline{12 = y}$$

<u>El número de amigos al principio era de 5 y el precio del menú es 12 euros.</u>

****