PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2009

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A. Para cada x se define la matriz $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente el determinante de la matriz A(x).

Restando a cada fila la anterior, resulta:

$$|A(x)|=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x & x-x^2 & x^2-x^3 \\ 0 & 0 & 1-x & x-x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}=\underline{\underline{(1-x)^3=|A(x)|}}$$

El valor del determinante se ha obtenido teniendo en cuenta que se trata del determinante de una matriz triangular superior y su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal.

****

Problema A. Discutir la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -2x + y + \alpha z = 1 \\ x + 3y + 3z = \alpha \end{cases}$ en función del parámetro α. Resolver para α = -1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 + 2a - 1 - 9a + 12 = 14 - 7\alpha = 0 \ ;; \ 2 - \alpha = 0 \ ;; \ \underline{\alpha = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ \alpha \neq 2 \Rightarrow Rango \ \ M = Rango \ \ M' = 3 = n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ Deter\min ado}}$$

$$Para \ \ \alpha = 2 \ \Rightarrow \ M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \ \ M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ \alpha = 2 \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M' = 2 < n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ In\det er\min ado}}$$

Para α = -1 el sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$.

Resolviendo mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{14 - 7 \cdot (-1)} = \frac{3 + 3 + 2 + 1 + 3 - 6}{14 + 7} = \frac{6}{21} = \underline{\underline{\frac{2}{7} = x}}$$

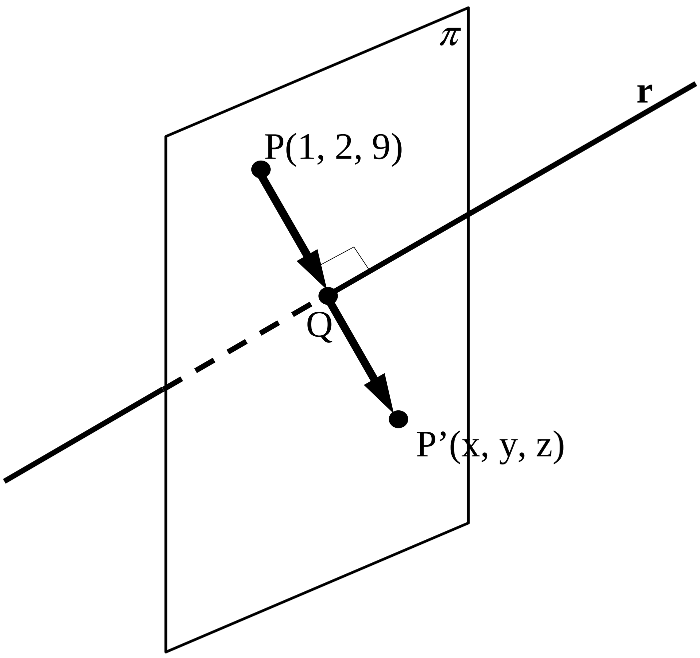
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{21} = \frac{9 + 2 - 1 - 1 - 3 + 6}{21} = \frac{12}{21} = \underline{\underline{\frac{4}{7} = y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{21}=\frac{-3-6+2-1-9-4}{21}=\frac{-21}{21}=\underline{\underline{-1=z}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B. Sea el punto P(1, 2, 9). Hallar el punto P' simétrico del punto P con respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 3 \\ z = 4t \end{cases}$.



La situación del ejercicio está representada en la figura adjunta.

Un vector director de r puede ser $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 4)$.

El haz de los infinitos planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x + y + 4z + D = 0$, y de ellos, el plano π que contiene a P(1, 2, 9) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 4z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 9) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$1 + 2 + 4 \cdot 9 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -39} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\pi \equiv x + y + 4z - 39 = 0}.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 3 \\ z = 4t \end{cases} \\ \pi \equiv x + y + 4z - 39 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ t + (t + 3) + 4 \cdot (4t) - 39 = 0 \ ;; \ 18t - 39 = 0 \ ;; \ t - 2 = 0 \ ;; \ \underline{t = 2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{Q(2,\ 5,\ 8)}$$

De la observación de la figura se deduce que: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow \ Q - P = P' - Q \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ (2,\ 5,\ 8) - (1,\ 2,\ 9) = (x,\ y,\ z) - (2,\ 5,\ 8) \ ;; \ (1,\ 3,\ -1) = (x - 2,\ y - 5,\ z - 8) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left.\begin{cases} 1 = x - 2 \ \rightarrow \ x = 3 \\ 3 = y - 5 \ \rightarrow \ y = 8 \\ -1 = z - 8 \ \rightarrow \ z = 7 \end{cases}\right\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(3,\ 8,\ 7)}}$$

****

Problema B. Dados el plano $\pi \equiv x+3y-2z+3=0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{1-y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Hallar la ecuación del plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

El plano α, por ser perpendicular al plano π, tiene como vector director al vector normal de π, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ 3,\ -2)$.

La recta r tiene como mejor expresión $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=(2,\ -1,\ 3)$ y, por estar contenida en el plano α, su vector director es también director de este plano.

Todos los puntos de r están contenidos en α, por lo cual también lo estará el punto de r, P(0, 1, -1).

La expresión general del plano α pedido es la siguiente:

$$\alpha\left(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 9x-4(y-1)-(z+1)-6(z+1)-2x-3(y-1)=0 \ ;;$$

$$7x-7(y-1)-7(z+1)=0 \ ;; \ x-(y-1)-(z+1)=0 \ ;; \ x-y+1-z-1=0$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv x-y-z=0}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C. Para cada A > 0 se considera la función $f_A(x)=\sqrt{L(x+A)}$. Encontrar de forma razonada el dominio de definición de f_A en función de A.

Para determinar el dominio de definición de f_A tendremos en cuenta dos cuestiones importantes:

1. - $\sqrt{M}$ *es real* $\forall M \in [0,\ +\infty)$.

2. - $L\,M > 0,\ \forall M \in (1,\ +\infty)$.

Según lo anterior, $L(x+A) \geq 0 \;\Rightarrow\; x + A \geq 1$;; $\underline{x \geq 1 - A}$.

La función está definida para los valores reales de x tales que x ≥ 1 – A.

****

Problema C. El coste de producción de x unidades de un producto es igual a C(x) dado por $C(x)=\frac{x^2}{4}+20x+15$ euros, y el precio de venta por unidad es $V(x)=45-\frac{x}{4}$ euros. Escribir la función que da el beneficio total si se venden x unidades. Encontrar el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

El beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el precio de coste.

El precio de venta de x unidades es $V(x)\cdot x=45x-\frac{x^2}{4}$ euros.

El beneficio conseguido en x unidades es $B(x)=V(x)\cdot x-C(x)$:

$$B(x)=45x-\frac{x^2}{4}-\left(\frac{x^2}{4}+20x+15\right)=45x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}-20x-15=\underline{-\frac{x^2}{2}+25x-15=B(x)}.$$

La función que da el beneficio en euros de x unidades es $\underline{\underline{B(x)=-\frac{x^2}{2}+25x-15}}$

Para que el beneficio sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera:

$$B'(x)=-x+25=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=25}$$

$$B''(x)=-1<0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo para } x=25}$$

<u>Para que el beneficio sea máximo deben venderse 25 unidades.</u>

****

BLOQUE D

Cuestión D. Calcular la primitiva $I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2} \cdot dx$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2 + 3x + 2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & -2x & & x - 3 \\
\cline{1-4}
0 & -3x^2 & -2x & & \\
 & +3x^2 & +9x & +6 & \\
\cline{2-4}
 & 0 & +7x & +6 &
\end{array}
$$

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2}\, dx = \int \left(x - 3 + \frac{7x + 6}{x^2 + 3x + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{7x + 6}{x^2 + 3x + 2}\, dx = \underline{\frac{x^2}{2} - 3x + I_1 = I} \quad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{7x + 6}{x^2 + 3x + 2}\, dx \Rightarrow \left\{ x^2 + 3x + 2 = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -1} \;\;;;\;\; \underline{x_2 = -2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{7x + 6}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(A + B)x + (2A + B)}{(x + 1)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} A + B = 7 \\ 2A + B = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A = -1} \;\;;;\;\; \underline{B = 8} \Rightarrow I_1 = \int \left(-\frac{1}{x + 1} + \frac{8}{x + 2} \right) dx = -\int \frac{1}{x + 1}\, dx + \int \frac{8}{x + 2}\, dx =$$

$$= \underline{8L\,|x + 2| - L\,|x + 1| + C = I_1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en la expresión (*) queda:

$$\underline{\underline{I = \frac{x^2}{2} - 3x + 8L\,|x + 2| - L\,|x + 1| + C}}$$

****

Problema D. Sea f la función definida mediante $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Trazar un esquema de la región del plano limitada por la gráfica de f, por su recta tangente en x = 0 y por la recta x = 1. Calcular el área del recinto.

Teniendo en cuenta que el dominio de definición de f es R y que $f(x)=\frac{1}{x^2+1}>0$, $\forall x \in R$; que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2+1}=0$, indica que el eje de abscisas es asíntota horizontal; que es simétrica con respecto al eje de ordenadas: $f(x)=f(-x)$ y que tiene un máximo absoluto en el punto P(0, 1), como se demuestra a continuación:

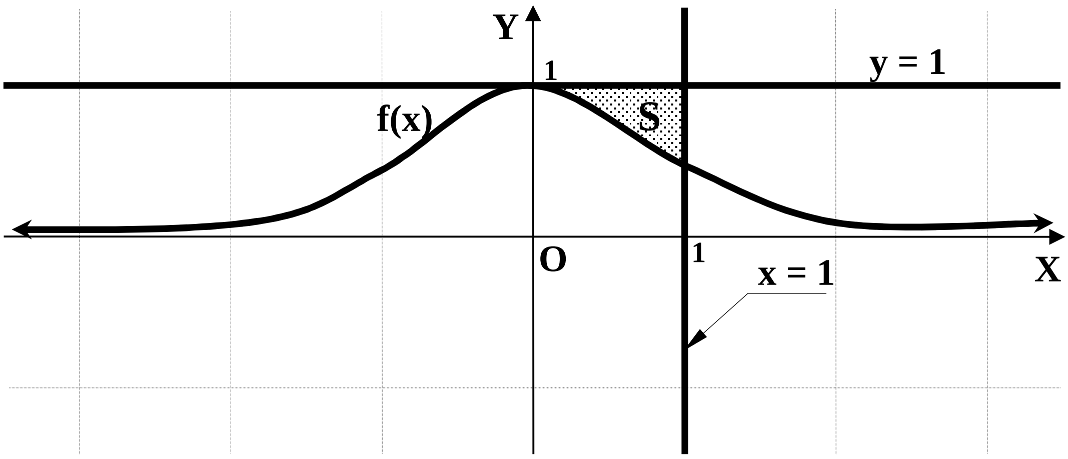
$$f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; -2x=0 \;\;;;\;\; \underline{x=0}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\left(x^2+1\right)^2+2x\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(x^2+1\right)+8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^2-2+8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\underline{\frac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}}$$

$$f''(0)=\frac{0-2}{\left(0^2+1\right)^3}=-2<0 \;\Rightarrow\; \underline{\text{Máximo para } x=0} \;\Rightarrow\; f(0)=1 \;\Rightarrow\; \underline{\text{Máximo}: P(0,\ 1)}$$

De lo anterior se deduce que la tangente a la función en x = 0 es la recta horizontal y = 1.

Con los datos anteriores se puede trazar, aproximadamente, la grafica de f(x), que es la siguiente:



Las ordenadas de la tangente son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función, por lo cual el área pedida es:

$$S=\int_0^1\left[1-f(x)\right]\cdot dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\cdot dx=\left[x-arc\ tag\ x\right]_0^1=\left(1-arc\ tag\ 1\right)-$$

$$-\left(0-arc\ tag\ 0\right)=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-0=\underline{\underline{\frac{4-\pi}{4}\cong\frac{0'86}{4}=0'21\ u^2\ =S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E. ¿Cuál es la última cifra del número $7^{2009} - 2009$? Razonar la contestación.

Considerando las terminaciones de las sucesivas potencias de 7, que son las siguientes:

$7^0 = 1$	$7^1 = 7$	$7^2 = 49$	$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$	$7^5 = 16807$	$7^6 = 117649$	$7^7 = 823543$

. . . .

Como puede apreciarse, se trata de una secuencia que se repite cada cuatro números, es decir: las potencias de exponentes 0, 4, 8, 12, $\cdots$, acaban en 1; las potencias de exponentes 1, 5, 9, 13, $\cdots$, acaban en 7; las potencias de exponentes 2, 6, 10, 14, $\cdots$, acaban en 9; las potencias de exponentes 3, 7, 11, 15, $\cdots$, acaban en 3.

En general, las potencias de orden n acaban en el mismo número del resto que resulta de dividir n entre 4.

El número 7^{2009} acaba en $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 2009 & 4 \\ \cline{2-2} 009 & 502 \\ 1 & \end{array}$$

$\rightarrow$ 1.

Si a un número que termina en 1 se le resta otro número que termina en dos, la diferencia termina en 2.

La última cifra del número $7^{2009} - 2009$ es 2.

****

Problema E. Se sabe que la suma de cinco números impares consecutivos es igual a 625. Encontrar dichos números de forma razonada.

Siendo x un número natural, el número (2x + 1) es impar.

Sea el impar (2x + 1) el central de los cinco números impares consecutivos escritos en forma creciente; los cinco impares son los siguientes:

$$2x + 1 - 4 , \quad 2x + 1 - 2, \quad 2x + 1, \quad 2x + 1 + 2, \quad 2x + 1 + 4.$$

Simplificando: $2x - 3$, $2x - 1$, $2x + 1$, $2x + 3$, $2x + 5$.

Como la suma es 625:

$$\left(2x-3\right)+\left(2x-1\right)+\left(2x+1\right)+\left(2x+3\right)+\left(2x+5\right)=625 \;\; ;; \;\; 10x+5=625 \;\; ;; \;\; 10x=620 \;\; ;; \;\; \underline{x=62}$$

<u>Los cinco números impares consecutivos son 121, 123, 125, 127 y 129.</u>

****