PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2009

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A. Para cada x se define la matriz $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente el determinante de la matriz A(x).

Restando a cada fila la anterior, resulta:

$$|A(x)|=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x & x-x^2 & x^2-x^3 \\ 0 & 0 & 1-x & x-x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}=\underline{\underline{(1-x)^3=|A(x)|}}$$

El valor del determinante se ha obtenido teniendo en cuenta que se trata del determinante de una matriz triangular superior y su valor es el producto de los elementos de la diagonal principal.

****

www.yoquieroaprobar.es

Problema A. Discutir la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ -2x+y+\alpha z=1 \\ x+3y+3z=\alpha \end{cases}$ en función del parámetro α. Resolver para α = -1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=9-6+2a-1-9a+12=14-7\alpha=0 \;;;\; 2-\alpha=0 \;;;\; \underline{\alpha=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \alpha \neq 2 \;\Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M'=3=n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

$$Para \;\; \alpha=2 \;\; \Rightarrow \;\; M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \alpha=2 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M'=2<n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; In\det er\min ado}}$$

Para α = -1 el sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ -2x+y-z=1 \\ x+3y+3z=-1 \end{cases}$.

Resolviendo mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{14-7\cdot(-1)}=\frac{3+3+2+1+3-6}{14+7}=\frac{6}{21}=\underline{\underline{\frac{2}{7}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{21}=\frac{9+2-1-1-3+6}{21}=\frac{12}{21}=\underline{\underline{\frac{4}{7}=y}}$$

www.yoquieroaprobar.es

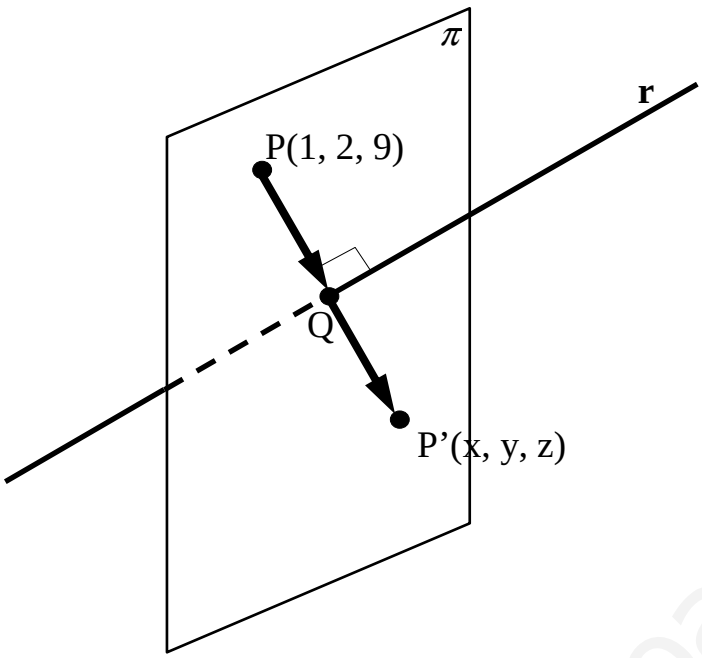
$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{21}=\frac{-3-6+2-1-9-4}{21}=\frac{-21}{21}=\underline{\underline{-1=z}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE B

Cuestión B. Sea el punto P(1, 2, 9). Hallar el punto P' simétrico del punto P con respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 3 \\ z = 4t \end{cases}$.



La situación del ejercicio está representada en la figura adjunta.

Un vector director de r puede ser $\vec{v} = (1,\ 1,\ 4)$.

El haz de los infinitos planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x + y + 4z + D = 0$, y de ellos, el plano π que contiene a P(1, 2, 9) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + 4z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 9) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$1 + 2 + 4 \cdot 9 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -39} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\pi \equiv x + y + 4z - 39 = 0}.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t + 3 \\ z = 4t \end{cases} \\ \pi \equiv x + y + 4z - 39 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t + (t + 3) + 4 \cdot (4t) - 39 = 0 \ ;;\ 18t - 39 = 0 \ ;;\ t - 2 = 0 \ ;;\ \underline{t = 2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{Q(2,\ 5,\ 8)}$$

De la observación de la figura se deduce que: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow \ Q - P = P' - Q \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2,\ 5,\ 8) - (1,\ 2,\ 9) = (x,\ y,\ z) - (2,\ 5,\ 8) \ ;;\ (1,\ 3,\ -1) = (x - 2,\ y - 5,\ z - 8) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = x - 2 \ \rightarrow \ x = 3 \\ 3 = y - 5 \ \rightarrow \ y = 8 \\ -1 = z - 8 \ \rightarrow \ z = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(3,\ 8,\ 7)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

Problema B. Dados el plano $\pi \equiv x+3y-2z+3=0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{1-y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Hallar la ecuación del plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

El plano α, por ser perpendicular al plano π, tiene como vector director al vector normal de π, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ 3,\ -2)$.

La recta r tiene como mejor expresión $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=(2,\ -1,\ 3)$ y, por estar contenida en el plano α, su vector director es también director de este plano.

Todos los puntos de r están contenidos en α, por lo cual también lo estará el punto de r, P(0, 1, -1).

La expresión general del plano α pedido es la siguiente:

$$\alpha\left(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 9x-4(y-1)-(z+1)-6(z+1)-2x-3(y-1)=0\ ;;$$

$$7x-7(y-1)-7(z+1)=0\ ;;\ x-(y-1)-(z+1)=0\ ;;\ x-y+1-z-1=0$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv x-y-z=0}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE C

Cuestión C. Para cada A > 0 se considera la función $f_A(x)=\sqrt{L(x+A)}$. Encontrar de forma razonada el dominio de definición de f_A en función de A.

Para determinar el dominio de definición de f_A tendremos en cuenta dos cuestiones importantes:

1. - $\sqrt{M}$ *es real* $\forall M \in [0, +\infty)$.

2. - $L\,M > 0, \ \forall M \in (1, +\infty)$.

Según lo anterior, $L(x+A) \geq 0 \ \Rightarrow \ x + A \geq 1$;; $\underline{x \geq 1 - A}$.

La función está definida para los valores reales de x tales que x ≥ 1 – A.

****

www.yoquieroaprobar.es

Problema C. El coste de producción de x unidades de un producto es igual a C(x) dado por $C(x)=\frac{x^2}{4}+20x+15$ euros, y el precio de venta por unidad es $V(x)=45-\frac{x}{4}$ euros. Escribir la función que da el beneficio total si se venden x unidades. Encontrar el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

El beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el precio de coste.

El precio de venta de x unidades es $V(x)\cdot x=45x-\frac{x^2}{4}$ euros.

El beneficio conseguido en x unidades es $B(x)=V(x)\cdot x-C(x)$:

$$B(x)=45x-\frac{x^2}{4}-\left(\frac{x^2}{4}+20x+15\right)=45x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}-20x-15=\underline{-\frac{x^2}{2}+25x-15=B(x)}.$$

La función que da el beneficio en euros de x unidades es $\underline{\underline{B(x)=-\frac{x^2}{2}+25x-15}}$

Para que el beneficio sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera:

$$B'(x)=-x+25=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=25}$$

$$B''(x)=-1<0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo para } x=25}$$

<u>Para que el beneficio sea máximo deben venderse 25 unidades.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE D

Cuestión D. Calcular la primitiva $I=\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\cdot dx$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2+3x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & -2x & & x-3 \\ \cline{1-4}
0 & -3x^2 & -2x & & \\
 & +3x^2 & +9x & +6 & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +7x & +6 &
\end{array}
$$

$$I=\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,dx=\int\left(x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-3x+\int\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\,dx=\underline{\frac{x^2}{2}-3x+I_1=I}\ (*)$$

$$I_1=\int\frac{7x+6}{x^2+3x+2}\,dx\ \Rightarrow\ \left\{x^2+3x+2=0\ ;;\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=-2}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{7x+6}{x^2+3x+2}=\frac{7x+6}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}A+B=7\\2A+B=6\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{A=-1}\ ;;\ \underline{B=8}\ \Rightarrow\ I_1=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x+2}\right)dx=-\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{8}{x+2}dx=$$

$$=\underline{8L|x+2|-L|x+1|+C=I_1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en la expresión (*) queda:

$$\underline{\underline{I=\frac{x^2}{2}-3x+8L|x+2|-L|x+1|+C}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

Problema D. Sea f la función definida mediante $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Trazar un esquema de la región del plano limitada por la gráfica de f, por su recta tangente en x = 0 y por la recta x = 1. Calcular el área del recinto.

Teniendo en cuenta que el dominio de definición de f es R y que $f(x)=\frac{1}{x^2+1}>0$, $\forall x\in R$; que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$, indica que el eje de abscisas es asíntota horizontal; que es simétrica con respecto al eje de ordenadas: $f(x)=f(-x)$ y que tiene un máximo absoluto en el punto P(0, 1), como se demuestra a continuación:

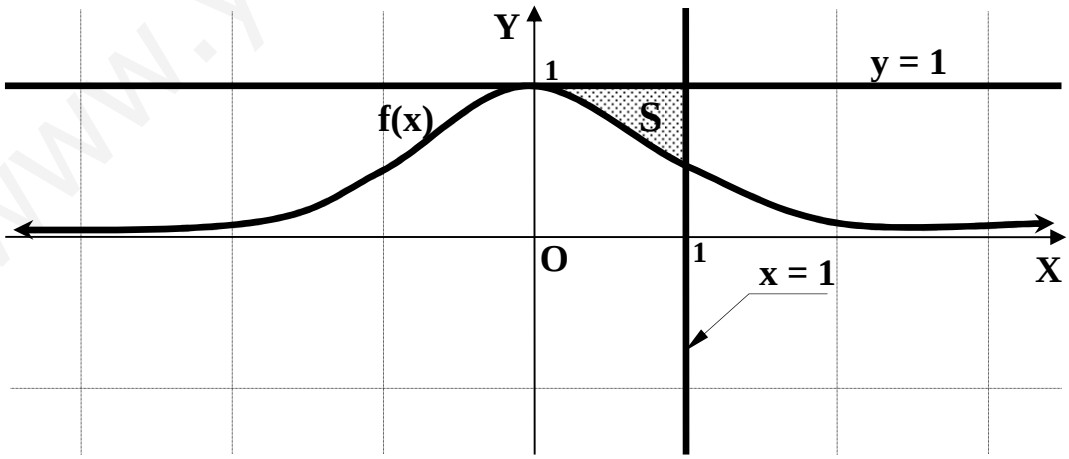
$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \;;;\; \underline{x=0}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2+1)^2+2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{-2\cdot(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3}=\underline{\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}}$$

$$f''(0)=\frac{0-2}{(0^2+1)^3}=-2<0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ para\ \ x=0} \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow \underline{Máximo:\ P(0,\ 1)}$$

De lo anterior se deduce que la tangente a la función en x = 0 es la recta horizontal y = 1.

Con los datos anteriores se puede trazar, aproximadamente, la grafica de f(x), que es la siguiente:



Las ordenadas de la tangente son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función, por lo cual el área pedida es:

$$S=\int_0^1[1-f(x)]\cdot dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\cdot dx=[x-arc\ tag\ x]_0^1=(1-arc\ tag\ 1)-$$

www.yoquieroaprobar.es

$$-\left(0-arc\ tag\ 0\right)=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-0=\underline{\underline{\frac{4-\pi}{4}\cong\frac{0'86}{4}=0'21\ u^2=S}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE E

Cuestión E. ¿Cuál es la última cifra del número $7^{2009} - 2009$? Razonar la contestación.

Considerando las terminaciones de las sucesivas potencias de 7, que son las siguientes:

$7^0 = 1$ $\quad 7^1 = 7$ $\quad 7^2 = 49$ $\quad 7^3 = 343$

$7^4 = 2401$ $\quad 7^5 = 16807$ $\quad 7^6 = 117649$ $\quad 7^7 = 823543$

. . . . . .

Como puede apreciarse, se trata de una secuencia que se repite cada cuatro números, es decir: las potencias de exponentes 0, 4, 8, 12, $\cdots$, acaban en 1; las potencias de exponentes 1, 5, 9, 13, $\cdots$, acaban en 7; las potencias de exponentes 2, 6, 10, 14, $\cdots$, acaban en 9; las potencias de exponentes 3, 7, 11, 15, $\cdots$, acaban en 3.

En general, las potencias de orden n acaban en el mismo número del resto que resulta de dividir n entre 4.

El número 7^{2009} acaba en $\rightarrow$ $\begin{array}{r|l} 2009 & 4 \\ \hline 009 & 502 \\ 1 & \end{array}$ $\rightarrow$ 1.

Si a un número que termina en 1 se le resta otro número que termina en dos, la diferencia termina en 2.

<u>La última cifra del número $7^{2009} - 2009$ es 2.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

Problema E. Se sabe que la suma de cinco números impares consecutivos es igual a 625. Encontrar dichos números de forma razonada.

Siendo x un número natural, el número (2x + 1) es impar.

Sea el impar (2x + 1) el central de los cinco números impares consecutivos escritos en forma creciente; los cinco impares son los siguientes:

2x + 1 – 4 , 2x + 1 – 2, 2x + 1, 2x + 1 + 2, 2x + 1 + 4.

Simplificando: 2x – 3 , 2x – 1, 2x + 1, 2x + 3, 2x + 5.

Como la suma es 625:

$$(2x-3)+(2x-1)+(2x+1)+(2x+3)+(2x+5)=625 \;;;\; 10x+5=625 \;;;\; 10x=620 \;;;\; \underline{x=62}$$

<u>Los cinco números impares consecutivos son 121, 123, 125, 127 y 129.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es