PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x+y+2z=2 \\ ax+y+2z=\alpha+1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir su compatibilidad en función del parámetro a.

b) Resolver el sistema para α = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a+2a+2-2-2-a^2=-a^2+3a-2=0 \;;;\; a^2-3a+2=0 \;;;\; a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{a_1=1} \;;;\; \underline{a_2=2}.$$

$$Para \;\; \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = 2C_2\} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+4+3-2-3-2 = 8-7 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2 \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α = 0. El sistema resulta $S \equiv \begin{cases} x+y+2z=2 \\ y+2z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+2-2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = \underline{\underline{1 = x}}\ \ ;;\ \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4-2-2}{-2} = \frac{0}{-2} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+1-2-1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} = z}}$$

****

2º) Sean los puntos A(3, 4, 1+2α) y B(-3, α, 0).

a) Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y B.

b) Contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿existe algún valor de α para el cual dicha recta contenga al punto P(9, 4, 6)?

----

a)

El vector director de la recta es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos A(3, 4, 1+2α) y B(-3, α, 0).

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} = A - B = (3,\ 4,\ 1+2a) - (-3,\ a,\ 0) = (6,\ 4-a,\ 1+2a).$$

Considerando, por ejemplo el punto B, obtenemos unas ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -3 + 6\lambda \\ y = a + (4-a)\lambda \\ z = (1+2a)\lambda \end{cases}}}$$

b)

Para que la recta r contenga al punto P(9, 4, 6) tiene que satisfacer su ecuación, es decir, se tiene que cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -3 + 6\lambda \\ y = a + (4-a)\lambda \\ z = (1+2a)\lambda \end{cases} \\ P(9,\ 4,\ 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} -3 + 6\lambda = 9 \\ a + (4-a)\lambda = 4 \\ (1+2a)\lambda = 6 \end{cases}\right\} \to 6\lambda = 12\ ;;\ \underline{\lambda = 2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a + (4-a)\cdot 2 = 4 \\ (1+2a)\cdot 2 = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a + 8 - 2a = 4 \\ 1 + 2a = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -a = -4 \\ 2a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to a = 4 \\ \to a = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ no\ \ contiene\ \ al\ \ punto\ \ P(9,\ 4,\ 6)}}$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La recta r contiene al punto P(9, 4, 6) cuando los vectores $\overrightarrow{AP}$ o $\overrightarrow{BP}$ son linealmente dependientes del vector $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (6,\ 4-a,\ 1+2a)$.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (9,\ 4,\ 6) - (3,\ 4,\ 1+2a) = (6,\ 0,\ 5-2a).$$

$$\frac{6}{6} = \frac{0}{4-a} = \frac{5-2a}{1+2a} \Rightarrow 5 - 2a = 1 + 2a\ ;;\ 4 = 4a\ ;;\ \underline{a = 1} \Rightarrow \frac{6}{6} \neq \frac{0}{1-4} \Rightarrow \underline{\underline{r\ \ no\ \ contiene\ \ a\ \ P}}.$$

****

3º) Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3-12x-8$. Representar la gráfica de f.

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x)=3x^2-12=0 \;;;\; 3(x^2-4)=0 \;;;\; x^2-4=0 \Rightarrow \underline{x_1=-2} \;;;\; \underline{x_2=2}.$$

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si la segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo relativo y si es positiva se trata de un mínimo relativo.

$$f''(x)=6x \Rightarrow f''(-2)=6\cdot(-2)=-12<0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo relativo para } x=-2}.$$

$$f(-2)=(-2)^3-12\cdot(-2)-8=-8+24-8=24-16=\underline{8=f(-2)}.$$

<u>Máximo relativo: P(-2, 8).</u>

$$f''(2)=6\cdot 2=12>0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=2}.$$

$$f(2)=2^3-12\cdot 2-8=8-24-8=\underline{-24=f(2)}.$$

<u>Mínimo relativo: Q(2, -24).</u>

Una función es creciente o decreciente en un punto según que su derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

Por ser una función polinómica es continua en su dominio, que es R, por lo cual los valores que anulan la derivada (-2 y 2) dividen el dominio en entornos cerrados de crecimiento y decrecimiento.

Considerando un valor de uno de sus intervalos es suficiente para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, ya que son alternos.

Por ejemplo, considerando el valor x = 0, perteneciente al intervalo (-2, 2) resulta:

$$f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow f'(0)=-12 \Rightarrow \underline{\textit{Decreciente para } x=0}.$$

$$\underline{\underline{\textit{Crecimiento} \Rightarrow (-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)}}$$

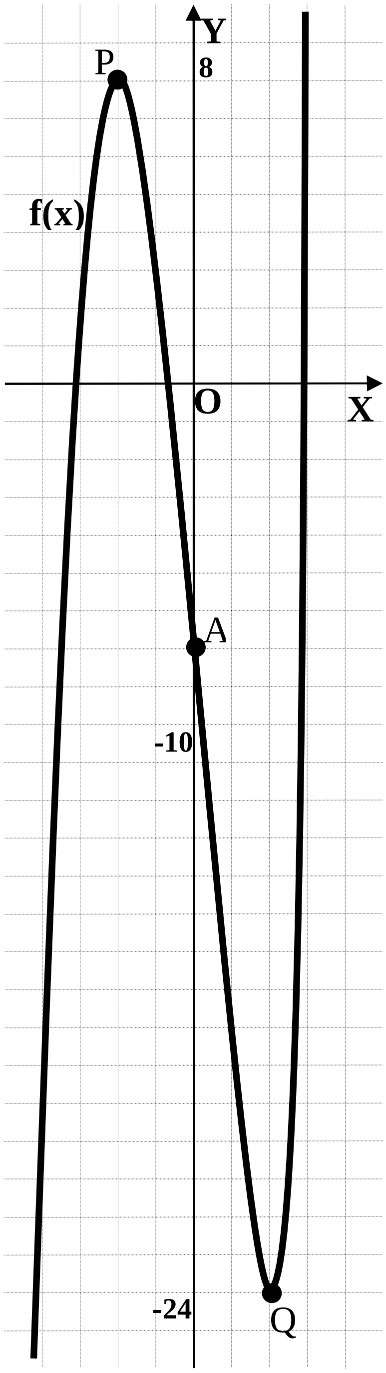
$$\underline{\underline{\textit{Decrecimiento} \Rightarrow (-2,\ 2)}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función, por ser polinómica, no tiene asíntotas y que los puntos de corte con los ejes son los siguiente:

$$Eje\ Y\ \Rightarrow\ x=0\ \ y=f(x)=-8\ \Rightarrow\ \underline{A(0,\ -8)}.$$

$Eje\ x\ \Rightarrow\ y=f(x)=0\ \Rightarrow\ x^3-12x-8=0\ \Rightarrow$ Resolviendo por Ruffini se observa que no tiene raíces enteras; no obstante, tiene tres puntos de corte con los ejes, cosa que se deduce de sus puntos máximo y mínimo relativos y los periodos de crecimiento y decrecimiento.

La representación gráfica es la siguiente:



****

4º) Calcular la integral indefinida $I=\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\cdot dx$, explicando el método seguido para el cálculo.

$$x^2+x-2=0 \;;;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=1\end{cases} \Rightarrow \underline{x^2+x-2=(x+2)(x-1)}.$$

$$I=\int \frac{x+8}{x^2+x-2}\cdot dx=\int \frac{x+8}{(x+2)(x-1)}\cdot dx \Rightarrow \frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{x+8}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=$$

$$=\frac{Ax-A+Bx+2B}{(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A+2B)}{x^2+x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}A+B=1\\ -A+2B=8\end{array}\right\} \Rightarrow 3B=9 \;;;\; \underline{B=3} \;;;\; \underline{A=-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; I=\int\left(\frac{-2}{x+2}+\frac{3}{x-1}\right)\cdot dx=-2L|x+2|+3L|x-1|+C=\underline{\underline{3L|x-1|-2L|x+2|+C=I}}$$

****

5º) Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de las cifras, se obtiene como resultado 594. Además la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Hallar dicho número.

Sea el número pedido $N = (abc)$. (No como producto).

Sabemos que las tres cifras del número suman 18: $\underline{a+b+c=18}$ $\quad (1)$.

$(abc)-(cba)=594 \Rightarrow (100a+10b+c)-(100c+10b+a)=594$;; $99a-99c=594$;; $\underline{a-c=6}$ $\quad (2)$

$b=\dfrac{a+c}{2}$;; $a+c=2b$;; $\underline{a-2b+c=0}$ $\quad (3)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos los valores de a, b y c:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=18 \\ a-c=6 \\ a-2b+c=0 \end{array}\right\} \rightarrow c=a-6 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+(a-6)=18 \\ a-2b+(a-6)=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a+b=24 \\ 2a-2b=6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a+b=24 \\ -2a+2b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3b=18 \;;;\; \underline{b=6}$$

$2a+b=24$;; $2a+6=24$;; $2a=18$;; $\underline{a=9}$;; $c=a-6=9-6=\underline{3=c}$

<u>El número pedido es el 963.</u>

****

OPCIÓN B

1º) a) Discutir la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 3x-2y-z=3 \\ ax-y+2z=a \end{cases}$, en función del parámetro α.

b) Resolver el sistema en el caso de indeterminación.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ a & -1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8-9-a+6a-2-6 = 5a-25 = 0 \ ;; \ a-5=0 \ ;; \ \underline{a=5}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a \neq 5 \ \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M' = 3 = n^{o} \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Determinado}}$$

$$Para \ \ a=5 \ \Rightarrow \ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \ de \ M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \ \ a=5 \ \Rightarrow \ Rango \ M = Rango \ M' = 2 < n^{o} \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ Indeterminado}}$$

b)

Resolvemos para α = 5. El sistema resulta $S \equiv \begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ 3x-2y-z=3 \\ 5x-y+2z=5 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$: $\left. \begin{matrix} 2x+y=2-3\lambda \\ 3x-2y=3+\lambda \end{matrix} \right\}$.

$$\left. \begin{matrix} 4x+2y=4-6\lambda \\ 3x-2y=3+\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow 7x = 7-5\lambda \ ;; \ \underline{x = 1-\frac{5}{7}\lambda} \ ;; \ 2x+y=2-3\lambda \ ;; \ y = 2-3\lambda-2x =$$

$$y = 2 - 3\lambda - 2 + \frac{10}{7}\lambda = \underline{-\frac{11}{7}\lambda = y}$$

$$\underline{\underline{Solución : \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{7}\lambda \\ y = -\frac{11}{7}\lambda , \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Dado el plano que pasa por los puntos A(1, 0, 2), B(0, -1, 3) y C(α, 2, -4). ¿Es posible calcular el valor del parámetro α para que dicho plano contenga al punto P(-2, 3, 0)? En caso afirmativo, calcular dicho valor.

Los puntos A(1, 0, 2), B(0, -1, 3) y C(α, 2, -4) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ -1,\ 3) - (1,\ 0,\ 2) = (-1,\ -1,\ 1).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (a,\ 2,\ -4) - (1,\ 0,\ 2) = (a-1,\ 2,\ -6).$$

La expresión general del plano π que pasa por los puntos A, B y C es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & -1 & 1 \\ a-1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 6(x-1) + (a-1)y - 2(z-2) + (a-1)(z-2) - 2(x-1) - 6y = 0\ ;;$$

$$4(x-1) + (a-7)y + (a-3)(z-2) = 0\ ;;\ 4x - 4 + (a-7)y + az - 2a - 3z + 6 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 4x + (a-7)y + (a-3)z + 2(1-a) = 0}$$

Para que el plano π contenga al punto P(-2, 3, 0) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 4x + (a-7)y + (a-3)z + 2(1-a) = 0 \\ P(-2,\ 3,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot (-2) + (a-7) \cdot 3 + (a-3) \cdot 0 + 2(1-a) = 0\ ;;$$

$$-8 + 3a - 21 + 0 + 2 - 2a = 0\ ;;\ a - 27 = 0\ ;;\ \underline{a = 27}.$$

<u>Para que el plano π contenga al punto P tiene que ser α = 27.</u>

****

3º) Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 10x + 2$. Estudiar los máximos y mínimos de f.

La pendiente de la tangente a una curva en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

La pendiente de la recta $y = 10x + 2$ es m = 10.

$$f'(x) = 12x^2 - 2 = 10 \;;\; 12x^2 = 12 \;;\; x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = -1} \;;\; \underline{x_2 = 1}.$$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = -4 + 2 + 1 = -1 \Rightarrow \underline{T_1(-1,\ -1)}.$$

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3 \Rightarrow \underline{T_2(1,\ 3)}$$

Sabiendo que la ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, las rectas tangentes son las siguientes:

$$t_1 \Rightarrow y + 1 = 10(x + 1) = 10x + 10 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 10x - y + 9 = 0}}.$$

$$t_2 \Rightarrow y - 1 = 10(x - 3) = 10x - 30 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv 10x - y - 29 = 0}}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = 12x^2 - 2 = 0 \;;\; 6x^2 - 1 = 0 \;;\; x^2 = \frac{1}{6} \;;\; x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}} \;;\; \underline{x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si la segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo relativo y si es positiva se trata de un mínimo relativo.

$$f''(x) = 24x \Rightarrow f''\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = 24 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -4\sqrt{6} < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo relativo para } x = -\frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

$$f\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = 4 \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) + 1 = -\frac{\sqrt{6}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1 = \frac{-\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 9}{9} = \frac{9 + 2\sqrt{6}}{9}.$$

$$\underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: A\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{9 + 2\sqrt{6}}{9}\right)}}$$

$$f''\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = 24 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 4\sqrt{6} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x = \frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

$$f\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)=4\cdot\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^3-2\cdot\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)+1=\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{3}+1=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{6}+9}{9}=\frac{9-2\sqrt{6}}{9}.$$

$$\underline{\underline{Mínimo\ \ relativo: \ B\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{9-2\sqrt{6}}{9}\right)}}$$

****

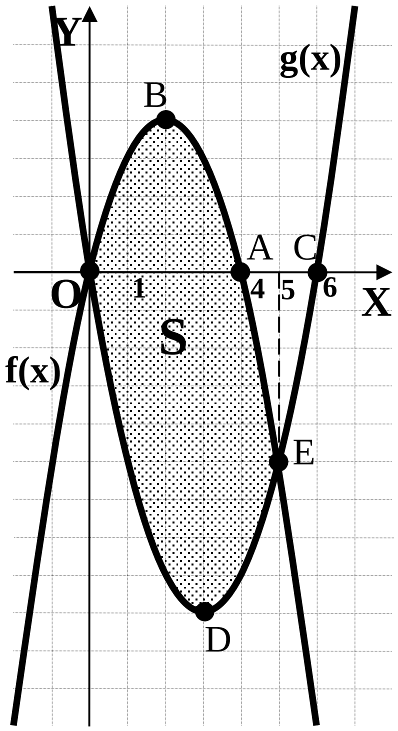
4º) Sean $f(x)=x(4-x)$ y $g(x)=x(x-6)$. Trazar un esquema gráfico del recinto que limitan y calcular su área mediante cálculo integral.

La función $f(x)=x(4-x)=4x-x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ que corta al eje de abscisas en los puntos O(0, 0) y A(4, 0) y su máximo absoluto es el siguiente:

$$f'(x)=4-2x=0 \Rightarrow x=2 \;;;\; f(2)=2\cdot(4-2)=4 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo absoluto}: B(2,\ 4)}.$$

La función $g(x)=x(x-6)=x^2-6x$ es una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje de abscisas en los puntos O(0, 0) y C(6, 0) y su mínimo absoluto es el siguiente:

$$g'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3 \;;;\; g(3)=3\cdot(3-6)=-9 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo absoluto}: D(3,\ -9)}.$$



El punto de corte de las dos funciones se obtiene igualando sus expresiones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x(4-x)=x(x-6) \;;;\; 4x-x^2=x^2-6x \;;;$$

$$2x^2-10x=0 \;;;\; 2x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \to \underline{O(0,\ 0)} \\ x_1=5 \to \underline{E(5,\ -5)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se refleja en la figura adjunta.

Para determinar el área del recinto que determinan tendremos en cuenta que las ordenadas de f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de g(x) en el intervalo correspondiente al recinto.

$$S=\int_0^5[f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^5[x(4-x)-x(x-6)]\cdot dx=\int_0^5\left(4x-x^2-x^2+6x\right)\cdot dx=\int_0^5\left(10x-2x^2\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{10x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^5=\left[5x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^5=\left(5\cdot5^2-\frac{2\cdot5^3}{3}\right)-0=125-\frac{250}{3}=\frac{375-250}{3}=\underline{\underline{\frac{125}{3}\ u^2=S}}$$

****

5º) Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede ser la suma x + y menor que 7? Razonar la contestación.

Se trata de calcular los dos números que cumpliendo lo pedido sumen lo mínimo.

$S = x + y \Rightarrow \textit{Mínimo.}$

$$x \cdot y = 16 \;;;\; y = \frac{16}{x} \Rightarrow S = x + y = x + \frac{16}{x} = \underline{\frac{x^2 + 16}{x} = S}.$$

Para que la suma sea mínima, su derivada tiene que ser cero:

$$S'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 16) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 16}{x^2} = \underline{\frac{x^2 - 16}{x^2} = S'(x)}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 16}{x^2} = 0 \;;;\; x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -4} \;;;\; \underline{x_2 = 4}.$$

La solución lógica es x = 4. (La solución x = -4, en teoría, es para máximo)

Vamos a justificar que x = 4 es para que la suma sea mínima:

$$S''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2(x^2 - 16)}{x^3} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 32}{x^3} = \underline{\frac{32}{x^3} = S''(x)}.$$

$$S''(4) = \frac{32}{4^3} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x = 4, \textit{ como queríamos justificar}}.$$

Para x = 4 es $y = \frac{16}{4} = 4$, cuya suma es 8 > 7.

La suma de los números no puede ser menor ni igual que 7.

****