PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Discutir el sistema de ecuaciones $S \equiv \begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$, en función del parámetro α. Resolverlo para α = 1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \;;;\; A' = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a + 2 + 4a - 1 = 6a + 1 = 0 \;;;\; \underline{a = -\frac{1}{6}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq -\frac{1}{6} \Rightarrow Rango\ \ A = Rango\ \ A' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ \det er \min ado}}$$

$$Para\ \ a = -\frac{1}{6} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+4=6 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a \neq -\frac{1}{6} \Rightarrow Rango \;\; A = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; A' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para el caso de α = 1. El sistema resulta ser $S \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2+4}{7} = \underline{\underline{\frac{6}{7} = x}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2+1}{7} = \underline{\underline{\frac{3}{7} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-2+1+2+1}{7} = \underline{\underline{\frac{2}{7} = z}}$$

****

2º) Se consideran los puntos A(4, 1, 1) y B(2, u, 3). Los puntos A y B son simétricos respecto a un plano π. Calcular de forma razonada la ecuación del plano π en función de u. ¿Existe algún valor de u para el cual el punto O(0, 0, 0) pertenezca al plano?

Los puntos A y B determinan el vector:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ u,\ 3) - (4,\ 1,\ 1) = (-2,\ u-1,\ 2)$.

El punto medio de A y B es $M\left(3,\ \frac{u+1}{2},\ 2\right)$.

El plano π es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{n} = (-2,\ u-1,\ 2)$ y contiene al punto $M\left(3,\ \frac{u+1}{2},\ 2\right)$; su ecuación general es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + (u-1)y + 2z + D = 0 \\ M\left(3,\ \frac{u+1}{2},\ 2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -6 + (u-1) \cdot \frac{u+1}{2} + 4 + D = 0\ \ ;;\ \ -2 + \frac{u^2-1}{2} + D = 0$$

$$-4 + u^2 - 1 + 2D = 0\ \ ;;\ \ 2D = 5 - u^2\ \ ;;\ \ \underline{D = \frac{5-u^2}{2}} \Rightarrow \pi \equiv -2x + (u-1)y + 2z + \frac{5-u^2}{2} = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x - 2(u-1)y - 4z + (u^2 - 5) = 0}}$$

Los planos que contienen al origen de coordenadas carecen de término independiente. Para que el plano π pase por el origen tiene que ser $u^2 - 5 = 0$.

$$\underline{\underline{El\ \ plano\ \ \pi\ \ contiene\ \ a\ \ O(0,\ 0,\ 0)\ \ para\ \ u = -\sqrt{5}\ \ y\ \ para\ \ u = \sqrt{5}}}$$

****

3º) Un comerciante vende café a 2'75 euros el kilo. El comerciante tiene dos tipos de gastos, el transporte de la mercancía y un impuesto de hacienda. Por cada kilo que vende el transporte le supone un gasto de 0'25 euros. Para calcular los euros que deben pagarse a hacienda por el impuesto hay que dividir el cuadrado de la cantidad de kilos que se venden entre 1200. Con estos datos calcular el número de kilos que debe vender el comerciante para que el beneficio sea máximo y calcular dicho beneficio máximo.

Sean x el número de kilos de café que vende el comerciante.

El gasto por transporte y hacienda es el siguiente: $G(x) = 0'25x + \frac{x^2}{1200}$.

El beneficio es la diferencia entre la recaudación y los gastos:

$$B(x) = 2'75x - G(x) = 2'75x - \left(0'25x + \frac{x^2}{1200}\right) = 2'75x - 0'25x - \frac{x^2}{1200} = \underline{2'5x - \frac{x^2}{1200}}.$$

Para que el beneficio sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$B'(x) = 2'5 - \frac{2x}{1200} = 2'5 - \frac{x}{600} = 0 \;\;;;\;\; 2'5 = \frac{x}{600} \;\;;;\;\; 2'5 \cdot 600 = x \;\;;;\;\; \underline{x = 1.500}.$$

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de x encontrado:

$R''(x) = -\frac{2}{1200} = -\frac{1}{600} < 0 \Rightarrow$ <u>Máximo para x = 1.500, c.q.j.</u>

<u>El comerciante debe vender 1.500 kilos de café para tener el máximo beneficio.</u>

Los beneficios son los siguientes:

$$B(1500) = 2'5 \cdot 1500 - \frac{1500^2}{1200} = 3750 - 1875 = 1875.$$

<u>El beneficio es de 1.875 euros.</u>

****

4º) La recta tangente en el punto P(4, 0) a la función $f(x)=x(4-x)$, la gráfica de la función f y el eje OY limitan un recinto del plano en el primer cuadrante. Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área mediante cálculo integral.

La tangente a una función en un punto es la derivada de la función en ese punto.

La derivada de la función $f(x)=x(4-x)=4x-x^2$ es $f'(x)=4-2x$.

El valor de la tangente en el punto P(4, 0) es: $m=f'(4)=4-2\cdot 4=\underline{-4=m}$.

Sabiendo que la ecuación de una recta conocida la pendiente viene dada por la ecuación: $y-y_0=m(x-x_0)$, aplicada al punto P(4, 0) y m = -4, resulta:

$y-0=-4(x-4)=-4x+16$.

La recta tangente a f(x) en el punto P(4, 0) es $\underline{t\equiv y=-4x+16}$.

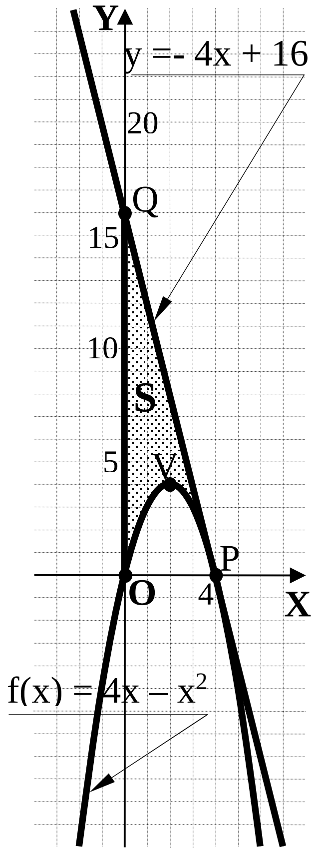
Teniendo en cuenta que la función $f(x)=4x-x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo máximo es:

$f'(x)=4-2x=0\Rightarrow x=2\ ;;\ f(2)=4\cdot 2-2^2=8-4=4\Rightarrow \underline{V(2,\ 4)}$.

Los puntos de corte con el eje X son O(0, 0) y P(4, 0).

La recta tangente corta a los ejes en los puntos P(4, 0) y Q(0, 16).

La representación gráfica, aproximada, de la solución es la indicada por la figura.



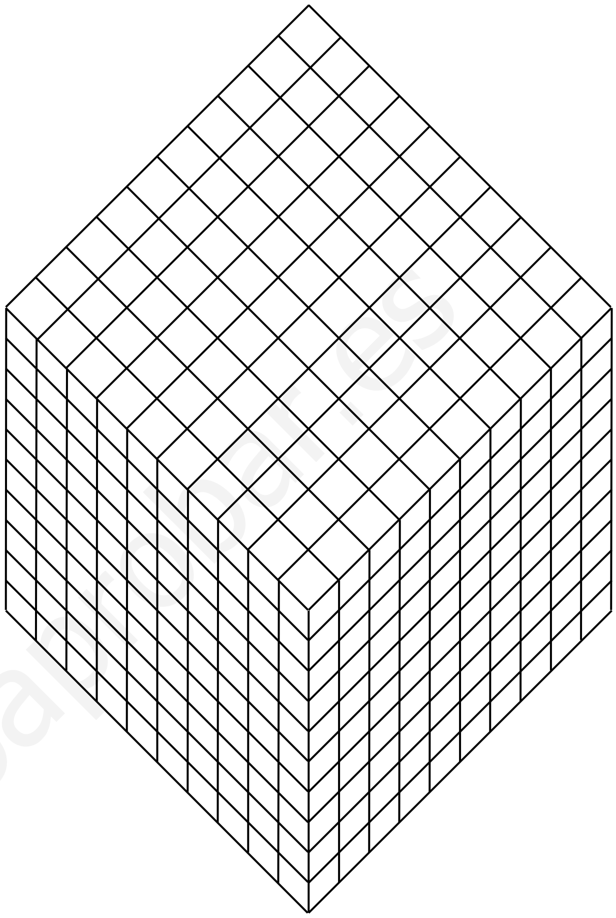
La superficie pedida es la diferencia de la limitada por la recta y la limitada por la parábola en el intervalo (1, 4).

$$S=\int_0^4\left[(-4x+16)-\left(4x-x^2\right)\right]\cdot dx=\int_0^4\left(x^2-8x+16\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+16x\right]_0^4=\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-4\cdot 4^2+16\cdot 4\right)-0=\frac{64}{3}-64+64=\underline{\underline{\frac{64}{3}\ u^2=S}}$$

****

5º) Un cubo sólido de madera de lado 20 cm se pinta de rojo. Luego con una sierra se hacen cortes paralelos a las caras, de centímetro en centímetro, hasta obtener $20^3 = 8000$ cubitos de lado 1 cm. ¿Cuántos de estos cubitos tendrán al menos una cara pintada de rojo?



Para facilitar la comprensión del ejercicio utilizamos un cubo de 10 x 10, que es el de la figura. Los cuadritos que tienen alguna cara pintada de rojo son todos los que se ven; y los que se ven son todos menos los que no se ven, que serían un cubo de 8 x 8.

En el caso de 10 x 10 tendrían al menos una cara pintada de rojo los siguientes:

$$N = 10^3 - 8^3 = 1000 - 512 = \underline{488}.$$

El caso puede generalizarse para cualquier número de divisiones de las caras del cubo.

En general, si cada cara del cubo se divide en n x n cuadritos el número de los que tendrían al menos una cara pintada serían:

$$N = n^3 - (n-2)^3 = n^3 - (n^3 - 6n^2 + 12n - 8) = \underline{6n^2 - 12n + 8 = N}.$$

Aplicando la fórmula:

Para n = 10 $\Rightarrow$ $N = 6 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + 8 = 608 - 120 = \underline{488}$.

Para n = 8 $\Rightarrow$ $N = 6 \cdot 8^2 - 12 \cdot 8 + 8 = 392 - 96 = \underline{296}$.

En el caso que nos ocupa es n = 20:

$$N = 6 \cdot 20^2 - 12 \cdot 20 + 8 = 2408 - 240 = \underline{2.168}.$$

<u>El número de cubitos con al menos una cara pintada de rojo es de 2.168.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, en función del parámetro α. Resolver el sistema en los casos de indeterminación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a+a+1-a^2-1-1 = -a^2+2a-1 = 0 \;;;\; -(a-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er \min ado}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M = Rango\ M' = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 1 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er \min ado}}$$

(Con dos grados de libertad)

Resolvemos para el caso de α = 1. El sistema resulta ser $S \equiv \{x+y+z=1$.

Haciendo $x=\lambda \;\; e \;\; y=\mu$, resulta:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases} \quad \forall \lambda,\ \mu \in R}}$$

****

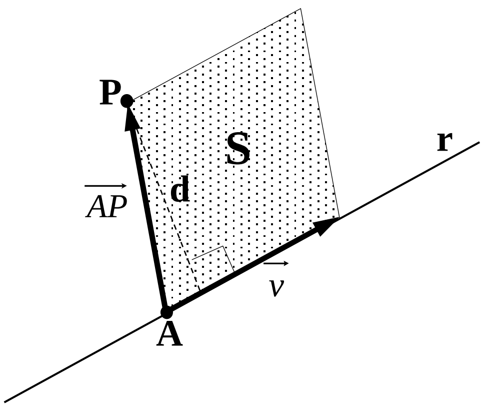
2º) Calcular la distancia del punto P(3, 2, -1) a la recta que pasa por los puntos $A(0,\ 1,\ 2)$ y $B(1,\ 0,\ 2)$. Describir de forma razonada los pasos seguidos para dicho cálculo.

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 2) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ -1,\ 0).$$

La distancia del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta un punto A de r y el vector $\overrightarrow{v}$, director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{AP}$ es:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (3,\ 2,\ 1) - (0,\ 1,\ 2) = (3,\ 1,\ -1).$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|i + k + 3k + j|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|i + j + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1+16}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3\ \ unidades = d(P,\ r)}}.$$

****

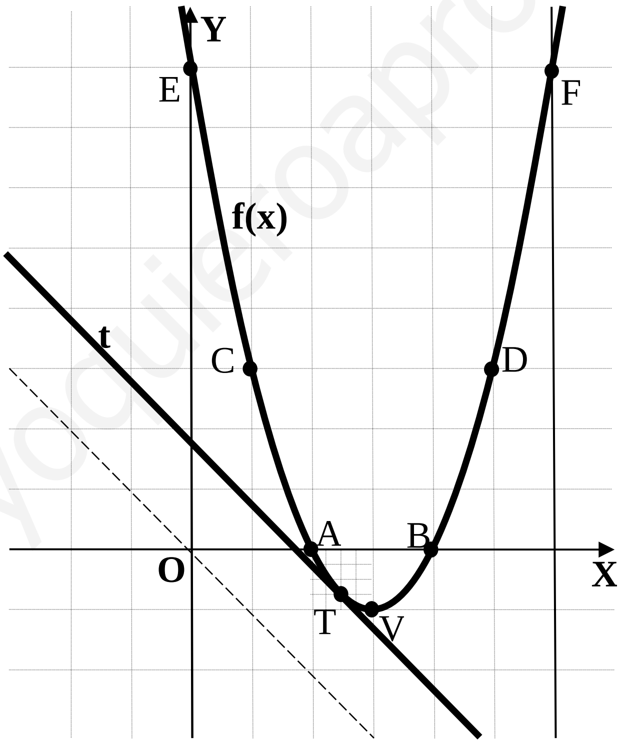
3º) Calcular el punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-6x+8$ en que la tangente en dicho punto es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Hacer una representación gráfica y calcular dicha recta tangente.

La función $f(x)=x^2-6x+8$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo mínimo es el siguiente:

$$f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow \underline{x=3} \;;;\; f(3)=3^2-6\cdot 3+8=9-18+8=-2 \Rightarrow \underline{V(3,\ -1)}.$$

Otros puntos de la parábola son A(2, 0) y B(4, 0); C(1, 3) y D(5, 1); E(0, 8) y $F(6,\ 8)$.

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes es la recta $y=-x$, cuya pendiente es m = 1. Por otra parte, la tangente a una curva en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.



De lo anterior se deduce:

$$f'(x)=m \Rightarrow 2x-6=-1 \;;;\; 2x=5 \;;;\; \underline{x=\frac{5}{2}}.$$

El punto T de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-6\cdot\frac{5}{2}+8=\frac{25}{4}-15+8=\frac{25}{4}-7=\frac{25-28}{4}=-\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{T\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)}}.$$

La ecuación de la recta tangente t, es la siguiente:

$$t \equiv y+\frac{3}{4}=-1\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)\ \ ;;\ \ 4y-3=-4x+10\ \ ;;\ \ \underline{t \equiv 4x+4y-13=0}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

****

4º) Explicar brevemente en qué consiste el método de integración por partes, y aplicarlo para el cálculo de la integral indefinida siguiente: $I=\int(2x+3)\cdot sen\ (5x+7)\cdot dx$.

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u\cdot v)=\int du\cdot v+\int u\cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u\cdot v)=u\cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I=\int(2x+3)\cdot sen\ (5x+7)\cdot dx\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=2x+3\rightarrow du=2dx \\ sen\ (5x+7)\cdot dx=dv\rightarrow v=-\frac{1}{5}\cos\ (5x+7)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=-(2x+3)\cdot\frac{1}{5}\cos\ (5x+7)-\int-\frac{1}{5}\cos\ (5x+7)\cdot 2dx=-\frac{1}{5}(2x+3)\cdot\cos\ (5x+7)+$$

$$+\frac{2}{5}\int\cos\ (5x+7)\ dx=-\frac{1}{5}(2x+3)\cdot\cos\ (5x+7)+\frac{2}{25}sen(5x+7)+C=$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{25}[2sen(5x+7)-5(2x+3)\cdot\cos\ (5x+7)]+C=I}}$$

****

5º) De entre los primeros 100 números naturales, se consideran aquellos que no son múltiplos de 3. Calcular de forma razonada la suma de dichos números.

Los número 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 99, 100 forman una progresión aritmética cuyo primer término es 1, el último 100 y el número de términos es 100.

Sabiendo que la suma de los términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; aplicándola a la progresión anterior es:

$$S_{100} = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50 = \underline{5.050}.$$

Teniendo en cuenta que 100 no es múltiplo de 3, los múltiplos de 3 menores que 100 forman la progresión aritmética 3, 6, 9, 12, $\cdots$, 96, 99.

El número de términos de la progresión anterior es $n = \frac{99-3}{3} = \frac{96}{3} = 32$; el primer término es 3 y el último 99.

La suma de los múltiplos de 3 menores de 100 es:

$$S_{\dot{3}} = \frac{3+99}{2} \cdot 32 = 102 \cdot 16 = \underline{1.632}.$$

La suma pedida es la diferencia entre las dos sumas halladas:

$$S = 5.050 - 1.632 = \underline{3.418}.$$

La suma de los no múltiplos de 3 menores o iguales a 100 es 3.418.

****