PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$. Discutir el sistema para los distintos valores de λ. Si existen casos de indeterminación, resolver en dichos casos. Si no existen explicar porqué.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 12\lambda + 2\lambda^2 - 14 = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \;;;\; \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \;;;$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2} = -3 \pm 4 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1} \;;;\; \underline{\lambda_2 = -7}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq -7 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ \ \lambda=1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -7 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1+C_2=C_3\}\Rightarrow\ \underline{Ramgo\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=1\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ \ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ \lambda=-7\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & -14 & -1\\ 3 & -1 & -7 & -6\end{pmatrix}\Rightarrow\ Rango\ \ M'\ \Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ M'=\begin{vmatrix}-7 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -6\end{vmatrix}=3-6+7-12=10-18=-8\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=-7\Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para λ =1 que resulta el sistema $S\equiv\begin{cases}x+2y=3\\ -x+2z=-1\\ 3x-y-7z=2\end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=3\\ -x=-1-2\lambda\end{array}\right\}\rightarrow\underline{x=1+2\lambda}\ \Rightarrow\ 2y=3-x=3-1-2\lambda=2-2\lambda\ ;;\ \underline{y=1-\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1-\lambda\ ,\ \ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

****

2º) Hallar las coordenadas del punto simétrico de A(0, -1, 1) con respecto a la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$ y . Discutir de forma razonada el procedimiento seguido.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

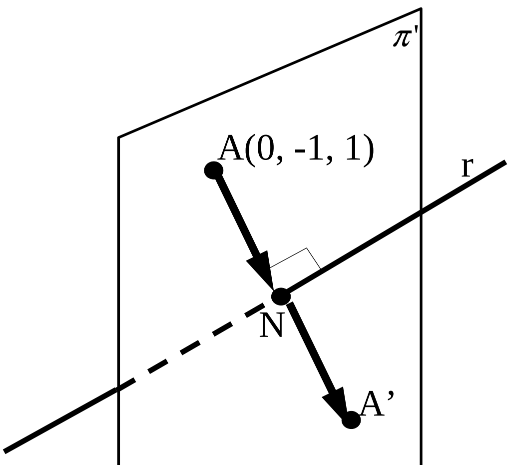
$$r \equiv \frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3} \;\Rightarrow\; \underline{r \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases}} \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 3)}$$

El plano π', perpendicular a r por A(0, -1, 1), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v}$ y contiene al punto A:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y + 3z + D = 0 \\ A(0,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 0 - 1 + 3\cdot 1 + D = 0 \;;;\; \underline{D = -2} \;\Rightarrow\; \underline{\pi' \equiv 2x + y + 3z - 2 = 0}\,.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y + 3z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(5+2\lambda) + \lambda + 3(2+3\lambda) - 2 = 0 \;;;\; 10 + 4\lambda + \lambda + 6 + 9\lambda - 2 = 0 \;;;$$



$$14\lambda + 14 = 0 \;;;\; \lambda + 1 = 0 \;;;\; \underline{\lambda = -1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 5 - 2 = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{N(3,\ -1,\ -1)}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta de forma aproximada.

Para que A’ sea el punto simétrico de A con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NA'} \Rightarrow N - A = A' - N \;;;$$

$$(3,\ -1,\ -1) - (0,\ -1,\ 1) = (x,\ y,\ z) - (3,\ -1,\ -1) \;;;\; (3,\ 0,\ -2) = (x -$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x - 3 = 3 \;\rightarrow\; \underline{x = 6} \\ y + 1 = 0 \;\rightarrow\; \underline{y = -1} \\ z + 1 = -2 \;\rightarrow\; \underline{z = -3} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A'(6,\ -1,\ -3)}}.$$

****

3º) Estudiar las asíntotas y los extremos de la función f dada por $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ y trazar un bosquejo de la gráfica de f.

Las asíntotas de f son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

Del primer apartado sabemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, de donde se deduce que la función no tiene asíntotas horizontales.

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x-1=0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

<u>Oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como en nuestro caso ocurre eso, <u>tiene asíntotas oblicuas.</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\underline{1=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\underline{1=n}$$

$$Asíntota\ \ oblícua \Rightarrow \underline{\underline{y=x+1}}$$

Para estudiar los máximos y mínimos relativos calculamos sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-x(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2x(x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\underline{\frac{2}{(x-1)^3}=f''(x)}$$

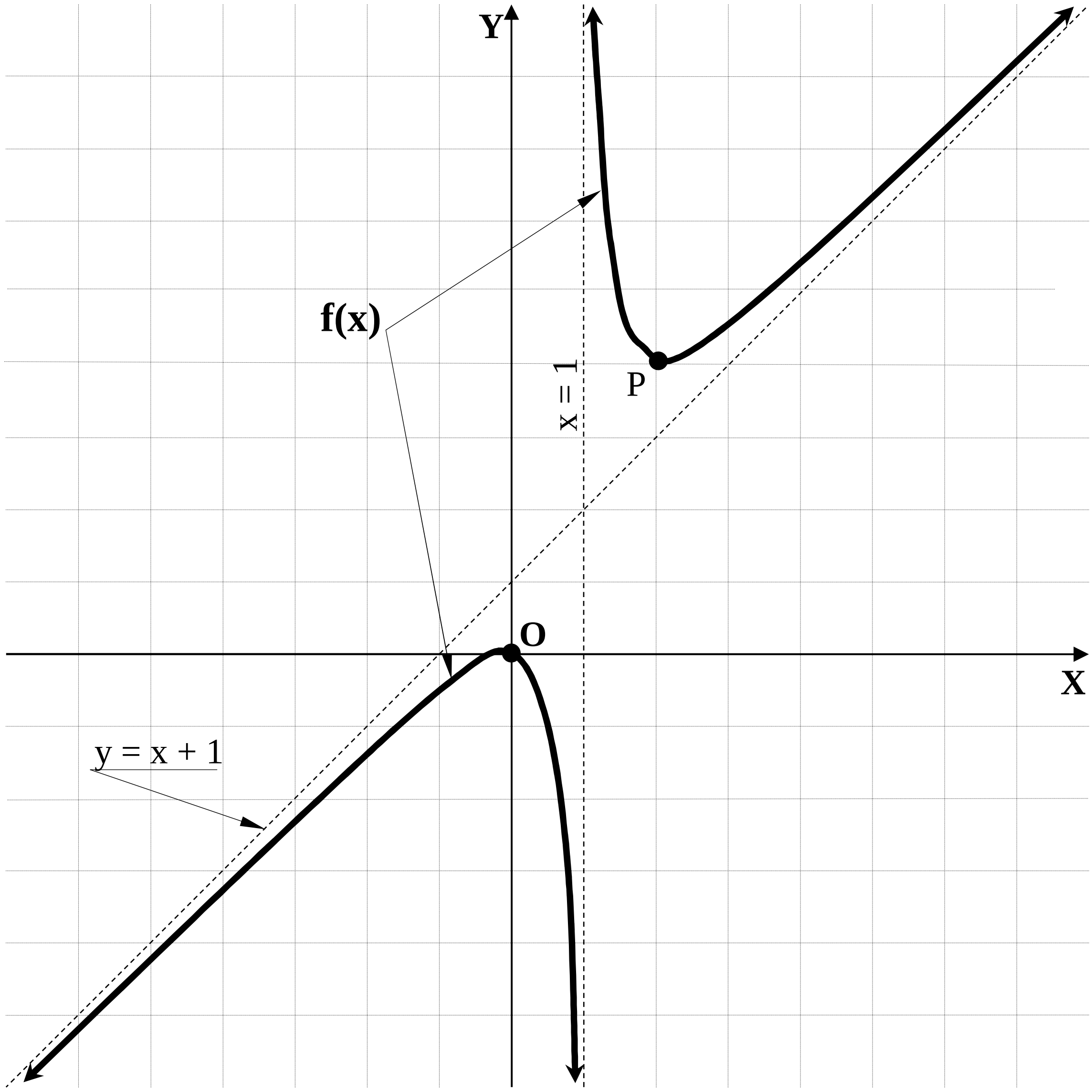
Para que existan máximos o mínimos relativos es condición necesaria que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \;\;;;\;\; x(x-2)=0 \;\;;;\;\; \underline{x_1=0} \;\;;;\;\; \underline{x_2=2}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0 \;\Rightarrow\; Máx. \;\;;;\;\; f(0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{Máx. \rightarrow O(0,\ 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1}=2>0 \;\Rightarrow\; Mín. \;\;;;\;\; f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{Mín. \rightarrow P(2,\ 4)}}$$

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

4º) Hallar la integral indefinida $I=\int \frac{3x^2+8x}{x^2+5x+6}\cdot dx$, explicando el proceso utilizado en el cálculo.

Como numerador y denominador tienen el mismo grado puede hacerse la división entera; no obstante puede sustituirse por el siguiente procedimiento:

$$I=\int \frac{3x^2+8x}{x^2+5x+6}\cdot dx=\int \frac{3x^2+5x+3x+6-6}{x^2+5x+6}\cdot dx=\int \frac{3x^2+5x+6+3x-6}{x^2+5x+6}\cdot dx=$$

$$=\int\left(1+\frac{3x-6}{x^2+5x+6}\right)\cdot dx=\int dx+3\int \frac{x-2}{x^2+5x+6}\cdot dx=\underline{x+3\cdot I_1=I}. \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, la integral I_1 puede resolverse del modo siguiente: $I_1=\int \frac{x-2}{x^2+5x+6}\cdot dx=\int \frac{x-2}{(x+2)(x+3)}\cdot dx$.

La fracción $\frac{x-2}{(x+2)(x+3)}$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{x-2}{(x+2)(x+3)}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x+3}=\frac{Mx+3M+Nx+2N}{(x+2)(x+3)}=\frac{(M+N)x+(3M+2N)}{(x+2)(x+3)}.$$

Considerando que dos fracciones iguales que tienen el mismo denominador tienen que tener el mismo numerador, se puede hacer:

$$\left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ 3M+2N=-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2M-2N=-2 \\ 3M+2N=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M=-4} \;;;\; \underline{N=5}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la integral I_1 se hace del siguiente modo:

$$I_1=\int\left(\frac{-4}{x+2}+\frac{5}{x+3}\right)\cdot dx=-4\int\frac{1}{x+2}\cdot dx+5\int\frac{1}{x+3}\cdot dx=\underline{-4L|x+2|+5L|x+3|+C=I_1}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*) queda:

$$I=x+3\cdot I_1=x+3\cdot\left(-4L|x+2|+5L|x+3|\right)+C.$$

$$\underline{\underline{I=x+15L|x+3|-12L|x+2|+C}}$$

****

5º) Al comenzar un curso de la Facultad la relación de alumnos entre hombres y mujeres era de 7/8. Al finalizar el primer cuatrimestre causaron baja 4 hombres y 10 mujeres y con ello la nueva relación de hombres a mujeres es de 12/11. Calcular el número de hombres y mujeres que comenzaron el curso.

Supongamos que al comenzar el curso había h hombres y m mujeres.

De la definición del problema se deduce lo siguiente:

$$\frac{h}{m}=\frac{7}{8} \Rightarrow 8h=7m \;;;\; \underline{8h-7m=0}. \qquad (1)$$

Al finalizar el primer cuatrimestre la relación entre hombres y mujeres es:

$$\frac{h-4}{m-10}=\frac{12}{11} \Rightarrow 11h-44=12m-120 \;;;\; \underline{11h-12m=-76}. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que forman (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 8h-7m=0 \\ 11h-12m=-76 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 88h-77m=0 \\ -88h+96m=608 \end{array}\right\} \Rightarrow 19m=608 \;;;\; m=\frac{608}{19}=\underline{32=m} \;;;\; 8h-7m=0 \;;;$$

$$8h=7m \;;;\; h=\frac{7m}{8}=\frac{7\cdot 32}{8}=7\cdot 4=\underline{28=h}.$$

<u>Comenzaron el curso 28 hombres y 32 mujeres.</u>

****

OPCIÓN B

1º) A es la matriz cuadrada de dos filas y dos columnas que verifica la igualdad matricial $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular de forma razonada la matriz A.

Sea la matriz pedida $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} a+2b & 3a+7b \\ c+2d & 3c+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a+2b=1 \\ 3a+7b=1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} c+2d=0 \\ 3c+7d=1 \end{array}\right\} \end{array} \right. \;;;\; \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -3a-6b=-3 \\ 3a+7b=1 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} -3c-6d=0 \\ 3c+7d=1 \end{array}\right\} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{b=-2} \\ \underline{d=1} \end{array}\right\} \;;;\; \left.\begin{array}{l} a+2b=1 \\ c+2d=0 \end{array}\right\} \; \left.\begin{array}{l} a-4=1 \\ c+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{a=5} \\ \underline{c=-2} \end{array}\right\}.$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

2º) Calcular, de manera razonada, la ecuación del plano que contiene al punto P(0, 2, 5) y a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son A(1, 2, 3) y $\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ 2)$.

Los puntos A y P determinan el vector :

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 2,\ 5) = (1,\ 0,\ -2)$.

La expresión general del plano π que contiene a P y a r es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2x + 2(y-2) + (z-5) + 2(y-2) = 0\ ;;$$

$$2x + 4(y-2) + (z-5) = 0\ ;;\ 2x + 4y - 8 + z - 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 4y + z - 13 = 0}}.$$

****

3º) De una función f se sabe que es derivable en todo R, que es creciente en R y que en todos los puntos satisface la desigualdad f(x) > 0. Con estos datos ¿se puede demostrar que $h(x)=e^{f(x)}-f(x)$ es creciente en todo R? Razonar la respuesta.

La condición necesaria y suficiente para que una función sea creciente en un punto es que su derivada sea positiva en ese punto.

Para que $h(x)$ sea creciente en R tiene que seer $h'(x)>0,\ \forall x\in R$.

$h'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}-f'(x)=\underline{f'(x)\cdot\left[e^{f(x)}-1\right]=h'(x)}$.

Sabiendo que f(x) es creciente en R tiene que ser $f'(x)>0$.

De lo anterior se deduce que $h'(x)>0\Rightarrow e^{f(x)}-1>0$, o sea: $e^{f(x)}>1$, lo cual es cierto por ser $e^0=1$ y una potencia de base mayor que 1 aumenta a medida que aumente su exponente.

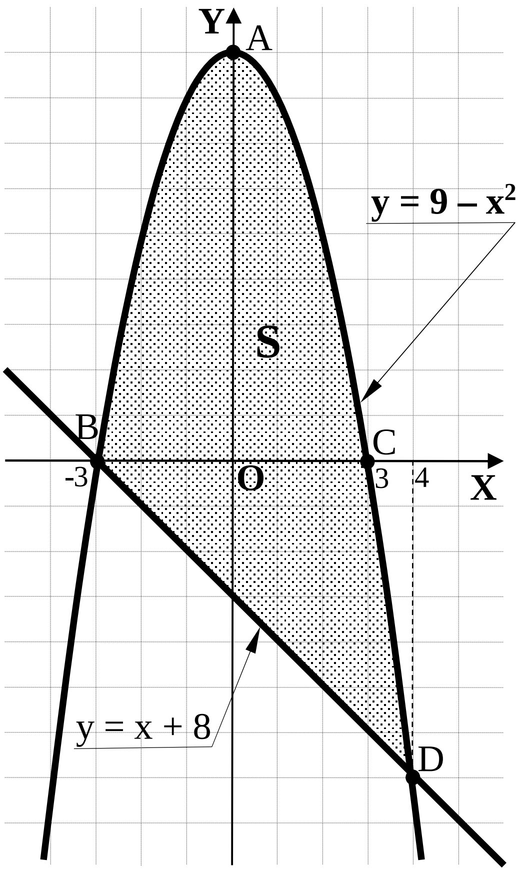
Todo lo anterior demuestra que:

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ h(x)=e^{f(x)}-f(x)\ \ es\ \ creciente\ \ en\ \ R}}$$

****

4º) a) Trazar un esquema gráfico del recinto del plano limitado por $y=9-x^2$ y por $y=-x-3$.

b) Hallar el área del recinto del apartado a) usando cálculo integral.



La parábola $y=9-x^2$ tiene su vértice en el punto A(9, 0) y es cóncava $(\cap)$. Corta al eje X en los puntos B(-3, 0) y C(3, 0).

Los puntos de corte de la recta y la parábola son las soluciones de la ecuación que resulta de igualar sus expresiones; son los siguientes:

$$9-x^2=-x-3 \;;\; x^2-x-12=0 \;;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=-3 \;\rightarrow\; \underline{B(-3,\ 0)} \\ x_2=4 \;\rightarrow\; \underline{D(4,\ -7)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

b)

Por ser todas las ordenadas de la parábola mayores o iguales que las correspondientes ordenadas de la recta en el intervalo (-3, 4), la superficie es la diferencia de las áreas limitadas por la parábola y la recta, respectivamente, o sea:

$$S=\int_{-3}^{4}\left[\left(9-x^2\right)-\left(-x-3\right)\right]\cdot dx=\int_{-3}^{4}\left(-x^2+x+12\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+12x\right]_{-3}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}+12\cdot 4\right)-\left[-\frac{(-3)^3}{3}+\frac{(-3)^2}{2}+12\cdot(-3)\right]=\left(-\frac{64}{3}+\frac{16}{2}+48\right)-\left(+\frac{27}{3}+\frac{9}{2}-36\right)=$$

$$=-\frac{64}{3}+8+48-9-\frac{9}{2}+36=83-\frac{64}{3}-\frac{9}{2}=\frac{498-128-27}{6}=\underline{\underline{\frac{343}{6}\ u^2=S}}.$$

****

5º) En un torneo de baloncesto participan 14 equipos. Todos juegan contra todos a doble vuelta.

a) ¿Cuántos partidos se han jugado en total?

b) Si el número de equipos fuese N ¿Cuántos partidos se jugarían?

----

a)

Se trata de variaciones (importa el orden) sin repetición (un equipo no juega contra si mismo) de 14 elementos tomados de dos en dos.

La fórmula de las variaciones de m elementos tomados de n en n es: $V_m^n = \frac{m!}{(m-1)!}$.

$$n^{\circ} \ \ partidos = V_{14}^{2} = \frac{14!}{(14-2)!} = \frac{14!}{12!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 14 \cdot 13 = \underline{182}.$$

En total se juegan 182 partidos.

b)

Si el número de equipos fuese N el número de partidos que se juegan son:

$$n^{\circ} \ \ partidos = V_{N}^{2} = \frac{N!}{(N-2)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2)!}{(N-2)!} = N \cdot (N-1) = \underline{N^2 - N}.$$

Si son N equipos se jugarían N^2 – N partidos.

****