PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema $\begin{cases} x+(A+1)y+Az=A+1 \\ Ay+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$.

a) Discutirlo según los valores del parámetro A.

b) Resolverlo, si es posible, para el caso de A = 4.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & A+1 & A \\ 0 & A & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & A+1 & A & A+1 \\ 0 & A & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro A es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & A+1 & A \\ 0 & A & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=A+1-A^2-1=A-A^2=A(1-A)=0 \Rightarrow \underline{A_1=0} \;;;\; \underline{A_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} A\neq 0 \\ A\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

$$Para\ \ A=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rango\ \ M'=2\,.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ A=0 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2 < n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

$$Para\ \ A=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}\,.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ A=1 \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para A = 4 el sistema resulta $\begin{cases} x+5y+4z=5 \\ 4y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+5y+4z=5 \\ 4y+z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \rightarrow z=-4y \\ \rightarrow x=1-y \end{array} \Rightarrow\ 1-y+5y+4\cdot(-4y)=5\ ;;\ 4y-16y=4\ ;;\ -12y=4\ ;;\,.$$

$$3y=-1\ ;;\ \underline{\underline{y=-\frac{1}{3}}}\ ;;\ x=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}=x\ ;;\ z=-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}=z\,.$$

****

2º) Dados los puntos A(1, 2, 3), B(1, -2, 4) y C(1, -3, α):

a) Calcular el valor del parámetro α, de tal manera que los tres puntos A, B y C estén alineados.

b) En el caso de α = 5 hallar la recta r que pasa por el origen y que además sea perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

---

a)

Los puntos A, B y C estarán alineados cuando los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -2,\ 4) - (1,\ 2,\ 3) = (0,\ -4,\ 1).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ -3,\ a) - (1,\ 2,\ 3) = (0,\ -5,\ a-3).$$

Tiene que cumplirse que $\frac{0}{0} = \frac{-4}{-5} = \frac{1}{a-3} \Rightarrow 4(a-3) = 5\ ;;\ 4a - 12 = 5\ ;;\ \underline{a = \frac{17}{4}}$.

$$\underline{\underline{Los\ puntos\ A,\ B\ y\ C\ están\ alineados\ para\ a = \frac{17}{4}}}$$

b)

Para α = 5 los vectores son $\vec{u} = (0,\ -4,\ 1)$ y $\vec{v} = (0,\ -5,\ 2)$.

La ecuación general del plano π es la siguiente: $\pi(A;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

$-8(x-1) + 5(x-1) = 0\ ;;\ -3(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x - 1 = 0}$.

El vector normal de π es $\vec{n} = (1,\ 0,\ 0)$.

La recta r pedida es la que tiene como vector director a $\vec{n} = (1,\ 0,\ 0)$ y pasa por el origen de coordenadas; por ejemplo, su expresión por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0,\ \forall \lambda \in R \\ z = 0 \end{cases}}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=Ax^3+Bx$, sabemos que pasa por el punto P(1, 1) y además que en ese punto tiene tangente paralela a la recta y = -3x.

a) De acuerdo a dichas condiciones calcular los valores de A y B.

b) Determinar los extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y por último realizar un dibujo de la función.

---

a)

Por pasar por P(1, 1) tiene que cumplirse que: $\underline{A+B=1}$. (1)

Por ser su tangente en P paralela a la recta y = -3x tiene que ser $f'(1)=1$:

$f'(x)=3Ax^2+B \Rightarrow f'(1)=\underline{3A+B=-3}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ 3A+B=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -A-B=-1 \\ 3A+B=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=-4 \;;;\; \underline{\underline{A=-2}} \;;;\; A+B=1 \rightarrow -2+B=1 \;;;\; \underline{\underline{B=3}}.$$

b)

La función resulta ser $f(x)=-2x^3+3x$.

Los extremos relativos son los siguientes:

$$f'(x)=-6x^2+3=0 \rightarrow 2x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \;;;\; \underline{x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$f''(x)=-12x \rightarrow f''\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=+6\sqrt{2}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ relativo: M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{2}\right)}}.$$

$$f''\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-6\sqrt{2}>0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ relativo: N\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)}}.$$

Nótese que la función $f(x)=-2x^3+3x$ es impar por lo cual los extremos relativos son simétricos con respecto al origen.

Teniendo en cuenta que la función es polinómica, su dominio es R, y es continua en R; por otra parte, una función es creciente o decreciente según que su derivada sea positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x) = -6x^2 + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \;;;\; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento: \left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)}}$$

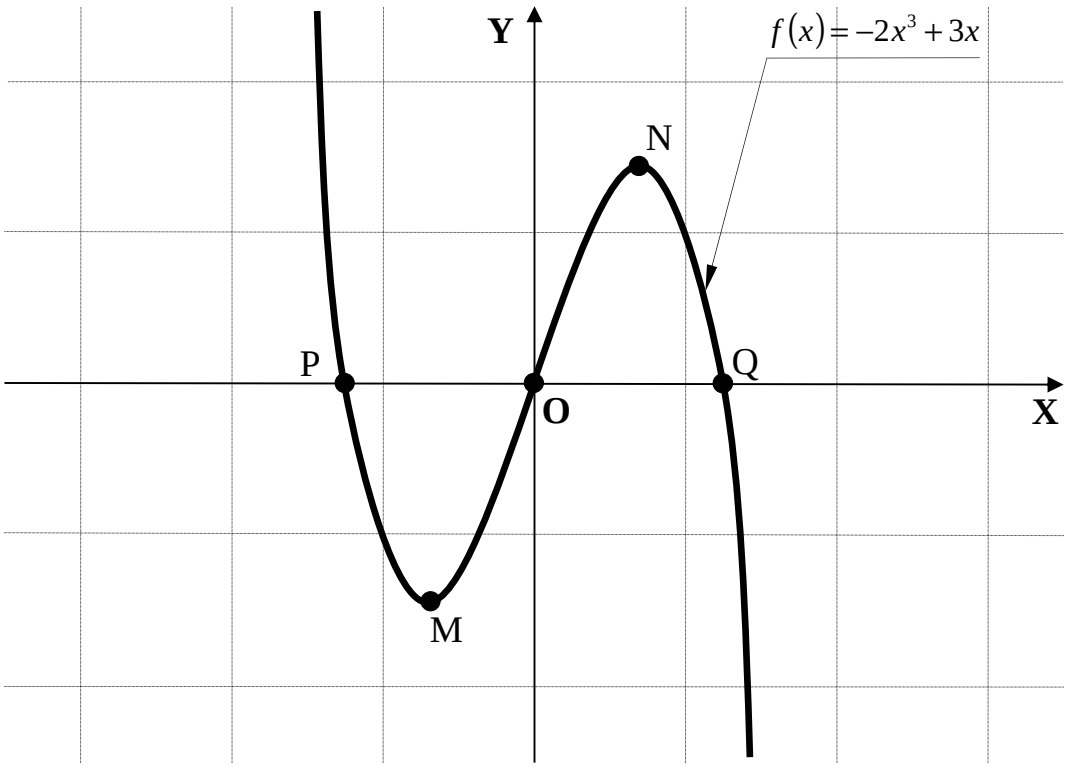
$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{Crecimiento: \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}.$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$f(x) = -2x^3 + 3x = 0 \;;;\; -x(2x^2 - 3) = 0 \;;;\; x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \;;;\; 2x^2 = 3 \;;;\; x^2 = \frac{2}{3} \;;;$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow \underline{P\left(0,\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)} \;;;\; x_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow \underline{Q\left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)}.$$

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la de la figura.



****

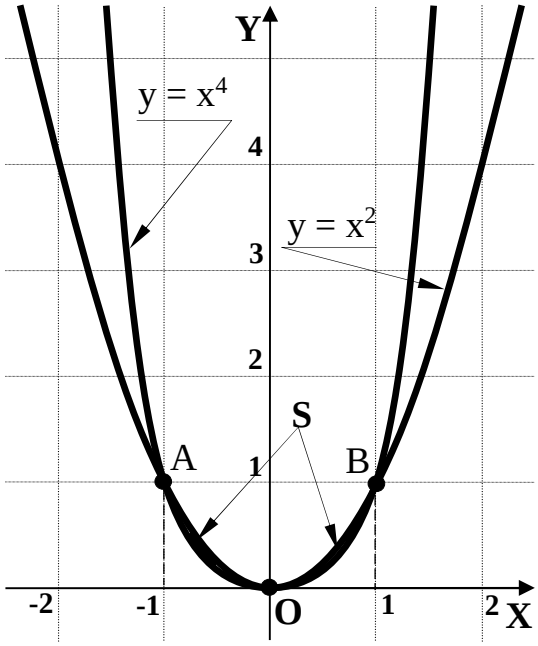
4º) Dadas las curvas $y = x^4$ e $y = x^2$;

a) Dibujar el recinto finito limitado por las gráficas de las dos curvas.

b) Calcular el área de dicho recinto.

---

a)



Los puntos de corte de las curvas se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x^2 = x^4 \;;;\; x^4 - x^2 = 0 \;;;\; x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \;;;$$

$$\underline{x_1 = x_2 = 0} \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \;;;\; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 1)} \\ x_4 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 1)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se puede observar en el gráfico.

Como se observa, las dos curvas son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

b)

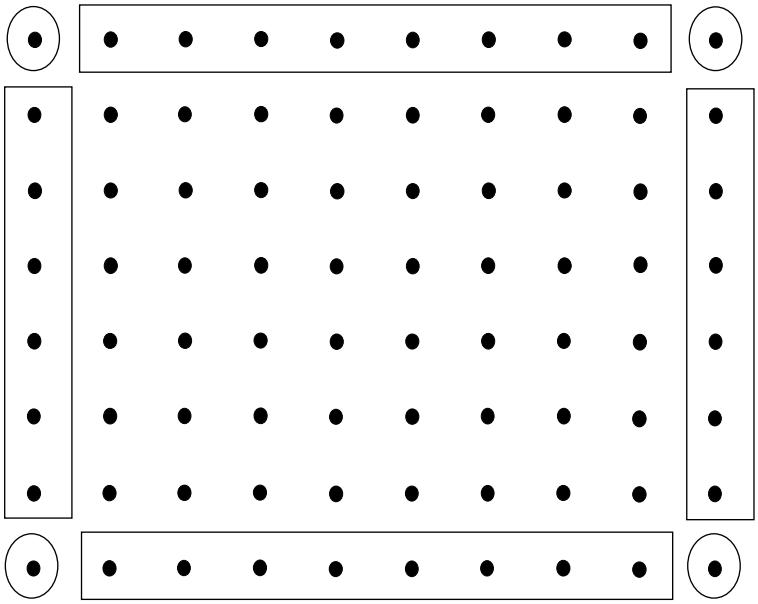
Teniendo en cuenta la simetría de las curvas y que las ordenadas de la curva $y = x^2$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = x^4$, la superficie pedida es:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - 0\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \underline{\underline{\frac{4}{15}\, u^2 = S}}\,.$$

****

5º) En el patio de un Instituto hay 80 escolares, alineados en 8 filas y 10 columnas. Cada escolar da la mano a todos los escolares que están a su alrededor. Suponiendo que el saludo entre dos personas se cuenta como un único saludo. ¿Cuántos saludos se dieron en total?

La situación es la indicada en la figura.



Cada uno de los 4 escolares situados en las esquinas saludan a tres compañeros; los que están en la fila o columna externa (excluyendo las esquinas) son 28 escolares, que saludan cada uno de ellos a 5 compañeros; es resto, que son 48, saluda cada uno de ellos a 8 compañeros. Teniendo en cuenta, como se nos dice, que el saludo entre dos personas se considera un solo saludo, el total de saludos es el siguiente:

$$N = \frac{4 \cdot 3 + 28 \cdot 5 + 48 \cdot 8}{2} = 2 \cdot 3 + 14 \cdot 5 + 24 \cdot 8 = 6 + 70 + 192 = 268 .$$

<u>El total de saludos es de 268.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Para cada par de números (α, b), se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los determinantes de las matrices A y B.

b) Para α = b = 1, calcular el determinante de la matriz producto A · B.

c) Obtener, razonadamente, para qué valores de α y b ninguna de las dos matrices tiene matriz inversa.

---

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=5a-3b+10-6+5a-5b=\underline{\underline{10a-8b+4=|A|}}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2b-2a+2-2b+4+a=\underline{\underline{-a-4b+6=|B|}}.$$

b)

Teniendo en cuenta que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, para α = b = 1, el determinante de la matriz producto A · B es el siguiente:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=(10a-8b+4)\cdot(-a-4b+6)\Rightarrow \text{ Para } \alpha = b = 1:$$

$$|A\cdot B|=(10-8+4)\cdot(-1-4+6)=6\cdot 1=\underline{\underline{6=|A\cdot B|}}.$$

c)

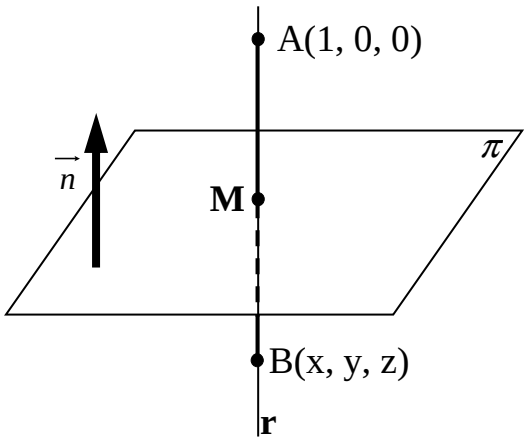
Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, por lo tanto, para que ninguna de las matrices A y B tengan inversa es necesario que sus determinantes sean ambos cero:

$$\left.\begin{matrix} 10a-8b+4=0 \\ -a-4b+6=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 5a-4b+2=0 \\ a+4b-6=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6a-4=0 \;;;\; \underline{\underline{a=\frac{2}{3}}} \;;;\; 4b=6-a=6-\frac{2}{3}=\frac{16}{3} \;;;\; \underline{\underline{b=\frac{4}{3}}}.$$

****

2º) Se sabe que el plano $\pi \equiv x+y+z=4$ es perpendicular al segmento AB y que lo divide en dos partes iguales. El punto es A(1, 0, 0). Halla las coordenadas de punto B y calcula la intersección del segmento AB con el plano.

Un vector normal al plano π es: $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$.



La recta r es la que pasa por el punto A y es perpendicular al plano tiene como vector director a $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ y su ecuación, dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

El punto M, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

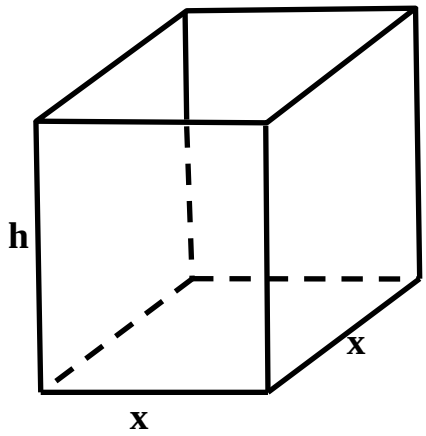
$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=4 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+\lambda+\lambda=4\ ;;\ 3\lambda=3\ ;;\ \underline{\lambda=1}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M(2,\ 1,\ 1)}}.$$

Para que M sea el punto medio de AB tiene que cumplirse que AM = MB:

$$\frac{1+x}{2}=2 \rightarrow \underline{x=3}\ ;;\ \frac{0+y}{2}=1 \rightarrow \underline{y=2}\ ;;\ \frac{0+z}{2}=1 \rightarrow \underline{z=2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B(3,\ 2,\ 2)}}$$

****

3º) Una empresa fabrica cajas de cartón sin tapa, de volumen 4.000 cm^3. Se sabe que las cajas tienen su base cuadrada. Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de cartón empleado en fabricarlas sea la mínima posible.



$$V = x^2 \cdot h = 4.000 \Rightarrow \underline{h = \frac{4.000}{x^2}}. \qquad (*)$$

La superficie de la base es $S_1 = x^2$ y la superficie del resto del envase es: $S_2 = 4xh$ y que, teniendo en cuenta el valor de h, se puede poner de la forma siguiente:

$$S_T = S_1 + S_2 = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{4.000}{x^2} =$$

$$= x^2 + \frac{16.000}{x} = \underline{\frac{x^3 + 16.000}{x} = S_T}.$$

Para que el cartón empleado sea mínimo, su derivada de S_T tiene que ser cero:

$$S_T' = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3 + 16.000\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 16.000}{x^2} = \frac{2x^3 - 16.000}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 16.000 = 0 \;;;\; x^3 - 8.000 = 0 \;;;\; x^3 = 8.000 = 20^3 \Rightarrow \underline{x = 20 \;\; cm}.$$

Sustituyendo el valor de x en (*) obtenemos el valor de h:

$$h = \frac{4.000}{20^2} = \frac{4.000}{400} = \underline{10 \;\; cm}.$$

<u>La cantidad de cartón es mínima para 20 cm del lado de la base y 10 cm de altura</u>.

****

4º) Calcular las siguientes integrales: a) $I_1 = \int 2x^3 \, L\,x \cdot dx$. b) $I_2 = \int \frac{x-2}{x^2-1} \cdot dx$.

---

a)

$$I_1 = \int 2x^3 \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ 2x^3 \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^4}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = L\,x \cdot \frac{x^4}{2} - \int \frac{x^4}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \underline{\underline{\frac{x^4}{8}(4L\,x - 1) + C = I_1}}.$$

b)

$$I_2 = \int \frac{x-2}{x^2-1} \cdot dx = \int \frac{x-2}{(x+1)(x-1)} \cdot dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right) \cdot dx = \int \frac{Ax - A + Bx + B}{x^2-1} \cdot dx =$$

$$= \int \frac{(A+B)x + (-A+B)}{x^2-1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ -A + B = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2B = -1 \;;;\; B = -\frac{1}{2} \;;;\; A = 1 - B = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{2} = A} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \cdot dx = \frac{3}{2} L|x+1| - \frac{1}{2} L|x-1| + C.$$

$$\underline{\underline{I_2 = \frac{1}{2} L \left| \frac{(x+1)^3}{x-1} \right| + C = I_2}}$$

****

5º) Compruebe que un polígono convexo de 6 lados tiene 9 diagonales.

a) ¿Cuántas diagonales tendrá un polígono convexo de n lados?

b) ¿Cuántos lados tiene el polígono convexo que posee 230 diagonales?

---

a)

Un polígono de n lados tiene n vértices. El número de segmentos que unen cada uno de los vértices con todos y cada uno de los demás son las combinaciones de n elementos tomados de dos en dos, pero de aquí tenemos que quitar los lados, que no son diagonales, por lo tanto, el número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$N = C_{n,\,2} - n = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \underline{\underline{\frac{n(n-3)}{2}}}\,.$$

b)

Aplicando la fórmula anterior, sabiendo que N = 230:

$$230 = \frac{n(n-3)}{2} \;;;\; 460 = n^2 - 3n \;;;\; n^2 - 3n - 460 = 0\,.$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot 460}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1840}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1849}}{2} = \frac{3 \pm 43}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 23} \;;;\; \underline{n_2 = -20}\,.$$

La solución -20 carece de sentido lógico.

<u>El polígono convexo que posee 230 diagonales tiene 23 lados.</u>

****