PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ ay-z=-1 \\ x+2ay=0 \end{cases}$.

a) Discutirlo según los distinto valores de α.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 2a & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 2a & 0 \end{vmatrix}=-1-a^2+2a=-a^2+2a-1=-\left(a^2-2a+1\right)=-(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

b)

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una de las ecuaciones (primera) y haciendo $\underline{y=\lambda}$: $\underline{z=1+\lambda}$, $\underline{x=-2\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R}}.$$

****

2º) Dado el punto P(1, 0, -2) y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases}$.

a) Determina la recta s que corta a r, es perpendicular a r y pasa por el punto P.

b) Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

----

a)

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ -4)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,\ -1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-8j-2k-2k-4i=-4i-8j-4k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ 1)}.$$

El haz β de los infinitos planos perpendiculares a la recta r tiene la siguiente forma implícita o general: $\beta \equiv x+2y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto P(1, 0, -2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x+2y+z+D=0 \\ P(1,\ 0,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2\cdot 0-2+D=0\ ;;\ D=1 \ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x+2y+z+1=0}.$$

El punto A intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman, que es $\left.\begin{array}{r} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \\ x+2y+z=-1 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \\ x+2y+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow y=2x-5 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+(2x-5)-4z=7 \\ x+2(2x-5)+z=-1 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 2x+2x-5-4z=7 \\ x+4x-10+z=-1 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 4x-4z=12 \\ 5x+z=9 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-z=3 \\ 5x+z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x=12\ ;;\ \underline{x=2}\ ;;\ 2-z=3\ ;;\ \underline{z=-1}\ ;;\ y=4-5=\underline{-1=y} \Rightarrow \underline{A(2,\ -1,\ -1)}.$$

El vector director de s es $\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 0,\ -2)-(2,\ -1,\ -1)=(-1,\ 1,\ -1)$.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases}}}$.

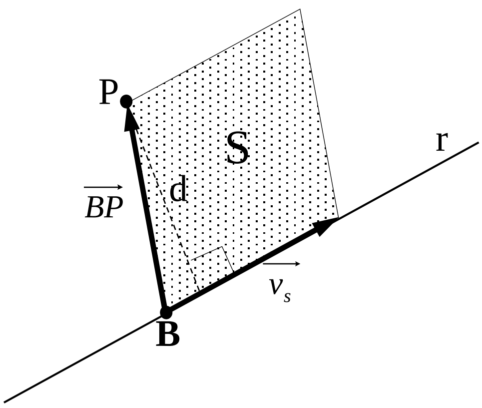
b)

La distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r es el doble de la distancia de P a r. Para determinar un punto de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases}2x+y-4z=7\\2x-y=5\end{cases}\Rightarrow \underline{x=\lambda}\Rightarrow \underline{y=-5+2\lambda}\ ;;\ z=\frac{2x+y-7}{4}=$

$$=\frac{2\lambda-5+2\lambda-7}{4}=\underline{-3+\lambda=z}\Rightarrow \underline{r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=-5+2\lambda\\z=-3+\lambda\end{cases}}.$$ Un punto de r es B(0, -5, -3).

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que B(0, -5, -3) es un punto de r y $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ 1)$ es el vector director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{BP}$ es:

$$\overrightarrow{BP}=P-B=(1,\ 0,\ -2)-(0,\ -5,\ -3)=(1,\ 5,\ 1).$$

Aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i&j&k\\1&2&1\\1&5&1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{\left|2i+j+5k-2k-5i-j\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\left|-3i-3k\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{18}{6}}=\underline{\sqrt{3}=d(P,\ r)}\Rightarrow \underline{\underline{d(P,\ Q)=\overline{PQ}=2\sqrt{3}\ unidades}}.$$

****

3º) Una franquicia de tiendas de electrónica ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas n que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión $B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$. Determina razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

----

a)

Para que los beneficios sean máximos es necesario que se anule la derivada de la función que determina dicho beneficio:

$$B'(n) = -4\,(2n^2 - 15n + 24) - 4n\,(4n - 15) = -8n^2 + 60n - 96 - 16n^2 + 60n = -24n^2 + 120n - 96 =$$

$$= -24(n^2 - 5n + 4) = 0 \;;;\; n^2 - 5n + 4 = 0 \;;;\; n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 4} \;;;\; \underline{n_2 = -1}.$$

La solución n = -1 carece de sentido lógico.

El número de tiendas que maximiza los beneficios es cuatro.

La justificación de que se trata de un máximo nos viene dado por el signo de la segunda derivada para el valor encontrado:

$$B''(n) = -4\,(2n - 5) \Rightarrow B''(4) = -4\,(8 - 5) = -4 \cdot 3 = -12 < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo, c. q. j.}}$$

b)

$$B(4) = -4 \cdot 4\,(2 \cdot 4^2 - 15 \cdot 4 + 24) = -16 \cdot (2 \cdot 16 - 60 + 24) = -16 \cdot (32 - 36) = -16 \cdot (-4) = \underline{64}.$$

El beneficio máximo es de 64.000 euros.

****

4º) Dadas las tres funciones $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=9x$ y $h(x)=25x$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las tres gráficas.

b) Calcular el área de dicho recinto.

----

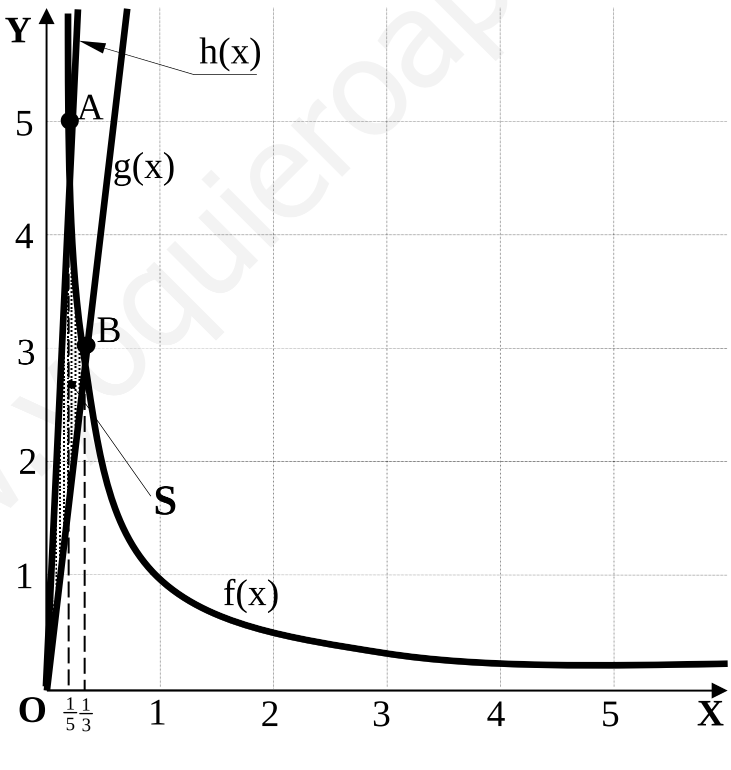
a)

Los puntos de corte de f(x) con las otras dos funciones en el primer cuandrante son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=9x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=9x \;;;\; 9x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{9} \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{1}{3},\ 3\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x} \\ h(x)=25x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=25x \;;;\; 25x^2=1 \;;;\; x^2=\frac{1}{25} \Rightarrow x=\frac{1}{5} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{1}{5},\ 5\right)}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



b)

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{1}{5}}[h(x)-g(x)]\cdot dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}}[f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{5}}(25x-9x)\cdot dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}-9x\right)\cdot dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{5}} 16x\cdot dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}\cdot dx-\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} 9x\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{5}} 16x\cdot dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}\cdot dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} 9x\cdot dx=\left[\frac{16x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{5}}+\left[Lx\right]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{9x^2}{2}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}}=$$

$$=\left[8x^2\right]_0^{\frac{1}{5}}+L\frac{1}{3}-L\frac{1}{5}+\left[\frac{9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2}\right]-\left[\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}\right]=8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+L1-L3-L1+L5+\frac{9}{50}-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{8}{25}-L3+L5+\frac{9}{50}-\frac{1}{2}=\frac{16-50L3+50L5+9-25}{50}=\frac{-50L3+50L5}{50}=L5-L3=\underline{\underline{L\frac{5}{3}\cong 0'51\,u^2=S}}.$$

****

5º) El número $N = 3^{120} \cdot 7^{140}$ es muy grande. ¿Sabrías obtener el dígito correspondiente a las unidades? Razónalo.

Las sucesivas potencias de 3 son las siguientes:

$$3^0 = 1 \;;\; 3^1 = 3 \;;\; 3^2 = 9 \;;\; 3^3 = 27 \;;\; 3^4 = 81 \;;\; 3^5 = 243 \;;\; 3^6 = 729 \;;\; 3^7 = 2187 \cdots$$

Se observa que las terminaciones son los dígitos 1, 3, 9, 7 en sucesivas repeticiones periódicas. En general 3^n termina en el mismo dígito que 3 elevado al resto de la división de n entre 4.

$$3^{120} \;\rightarrow\; \begin{array}{r|l} 120 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 30 \end{array} \;\rightarrow\; 3^0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{1}}$$

Las sucesivas potencias de 7 son las siguientes:

$$7^0 = 1 \;;\; 7^1 = 7 \;;\; 7^2 = 49 \;;\; 7^3 = 343 \;;\; 7^4 = 2401 \;;\; 7^5 = 16807 \;;\; 7^6 = 117649 \;;$$

$$7^7 = 823543 \cdots$$

Se observa que las terminaciones son los dígitos 1, 7, 9, 3 en sucesivas repeticiones periódicas. En general 7^n termina en el mismo dígito que 7 elevado al resto de la división de n entre 4.

$$7^{140} \;\rightarrow\; \begin{array}{r|l} 140 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 20 \end{array} \;\rightarrow\; 7^0 \;\rightarrow\; \underline{\underline{1}}$$

<u>El número N = $3^{120} \cdot 7^{140}$ termina en $1 \cdot 1 = 1$.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro m.

b) Para m = 0 halla la matriz inversa de A.

----

a)

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{vmatrix}=m+7m^2+9-m-21-3m^2=4m^2-12=4\left(m^2-3\right)=0\ ;;\ m^2-3=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{m_1=\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{m_2=-\sqrt{3}}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m\neq\sqrt{3} \\ m\neq-\sqrt{3} \end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ A=3\ \ y\ \ para\ \begin{Bmatrix} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ A=2}}\ \text{y}$$

b)

Para m = 0 la matriz es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Se obtiene la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\ \{F_3\to F_3-F_1\}\ \Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} F_1\to F_1-3F_2 \\ F_3\to F_3-4F_2 \end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to-\tfrac{1}{12}F_3\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix} F_1\to F_1+9F_3 \\ F_2\to F_2-3F_3 \end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{array}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Se consideran los puntos A(1, -1, 0) y B(2, 0, 3).

a) ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta que une A y B y que además pase por el punto C(2, 2, 3)? En caso afirmativo hallar la ecuación de dicho plano, en caso negativo razonar la respuesta.

b) ¿Es posible encontrar una recta que pase por A, B y C? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta, en caso negativo razonar la respuesta.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ 3) - (1,\ -1,\ 0) = (1,\ 1,\ 3)$. El haz de planos β perpendiculares a la recta que pasa por A y B tiene por ecuación general

$\beta \equiv x + y + 3z + D = 0$. Si existe un plano π del haz β que contenga al punto C(2, 2, 3) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 3z + D = 0 \\ C(2,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 + 2 + 3 \cdot 3 + D = 0\ ;;\ 4 + 9 + D = 0\ ;;\ 13 + D = 0\ ;;\ \underline{D = -13}.$$

El plano existe y es:

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + 3z - 13 = 0}}$$

b)

Para que exista una recta r que pase por A, B y C, los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 3)$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 2,\ 3) - (1,\ -1,\ 0) = (1,\ 3,\ 3)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (1,\ 3,\ 3)$ no son linealmente dependientes por no ser proporcionales sus componentes: $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{3}{3}$.

<u>No existe ninguna recta que pase por los puntos A, B y C.</u>

****

3º) Dada la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

a) Hallar los valores de los parámetros A, B y C para que f tenga un extremo en x = 0 y otro en x = 2. ¿Son únicos dichos parámetros?

b) Determinar de qué tipo de extremo se trata (máximo o mínimo).

c) Representar f en el caso de C = 0.

----

a)

La función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ tendrá un extremo para x = 0 y para x = 2 cuando su primera derivada se anule para estos valores:

$$f'(x)=3x^2+2Ax+B \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=\underline{\underline{B=0}} \\ \\ f'(2)=12+4A+0=0 \;;;\; 3+A=0 \;;;\; \underline{\underline{A=-3}} \end{cases}.$$

La función resulta $f(x)=x^3-3x^2+C$.

<u>Son únicos los parámetros hallados, pero C puede tomar cualquier valor real.</u>

b)

$$f'(x)=3x^2-6x \;;;\; f''(x)=6x-6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=-6<0 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=0}} \\ \\ f''(2)=12-6=6>0 \Rightarrow < \underline{\underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=2}} \end{cases}.$$

c)

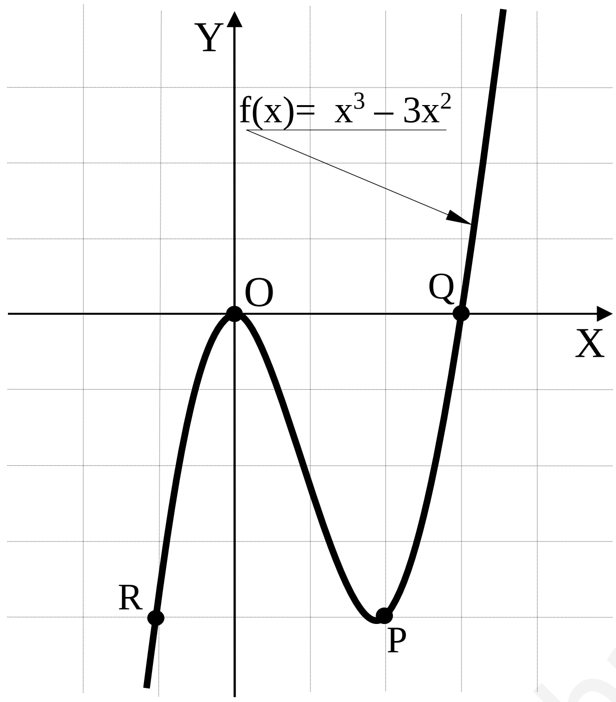
Para C = 0 la función es $f(x)=x^3-3x^2$ y los extremos relativos son los siguientes:

$$f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ relativo: O(0,\ 0)} \\ \\ f(2)=2^3-3\cdot 2^2=8-12=-4 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ relativo: P(2,\ -4)} \end{cases}.$$

La función pasa por el origen de coordenadas, donde tiene un máximo relativo, y además corta al eje X en los siguientes puntos:

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3-3x^2=0 \;;;\; x^2(x-3)=0 \;;;\; x=3 \Rightarrow \underline{Q(3,\ 0)}.$$

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que pasa por el punto R(-1, -4), puede hacerse una representación gráfica, aproximada de la función, que es la que aparece en el siguiente gráfico.


Y
f(x)= x3 – 3x2
O
Q
X
R
P

****

4º) Explicar en que consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular las integrales $A=\int x \cdot Lx \cdot dx$ y $A=\int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$.

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u \cdot v)=du \cdot v+u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v)=\int du \cdot v+\int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v)=u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u \cdot dv=u \cdot v-\int v \cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar las integrales pedidas.

$$A=\int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=Lx \rightarrow du=\frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx=dv \rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=Lx \cdot \frac{x^2}{2}-\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx=$$

$$=\frac{x^2}{2} \cdot Lx-\frac{1}{2}\int x \cdot dx=\frac{x^2}{2} \cdot Lx-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}+C=\underline{\underline{\frac{x^2}{4}(2Lx-1)+C=A}}.$$

$$B=\int x \cdot \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=x \rightarrow du=dx \\ \cos(2x) \cdot dx=dv \rightarrow v=\frac{1}{2}sen\,(2x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=x \cdot \frac{1}{2}sen\,(2x)-\int \frac{1}{2}sen\,(2x) \cdot dx=\frac{x}{2} \cdot sen\,(2x)-\frac{1}{2}\int sen\,(2x) \cdot dx=$$

$$=\frac{x}{2} \cdot sen\,(2x)+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)+C=\underline{\underline{\frac{1}{4}[2x \cdot sen\,(2x)+\cos(2x)]+C=B}}.$$

****

5º) La suma de 25 múltiplos seguidos de 13 es 7.150. ¿Cuál es el primer múltiplo de 13 que aparece en dicha suma? ¿Cuál es el último múltiplo de 13 que aparece en dicha suma?

Los 25 múltiplos consecutivos de 13 forman una progresión aritmética de 25 sumandos y cuya diferencia es 13.

Sabiendo que el término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

En la expresión anterior del término general conocemos n = 25 y d = 13, con lo cual el último término de la progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (25-1) \cdot 13 = a_1 + 312$.

Sabiendo que la suma de los términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, y sabiendo que S_n = 7.150 y expresando el valor de α_n en función de α_1:

$$7.150 = \frac{a_1 + (a_1 + 312)}{2} \cdot 25 \;;;\; \frac{7.150 \cdot 2}{25} = 2a_1 + 312 \;;;\; 732 - 312 = 2a_1 \;;;\; 260 = 2a_1 \;;;\; \underline{a_1 = 130}.$$

$$a_n = a_1 + 312 = 130 + 312 = \underline{442}.$$

<u>El primer múltiplo de 13 es 130 y el último, 442.</u>

****