PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$, donde α es un parámetro real:

a) Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro α.

b) Explicar si la matriz A tiene inversa para el caso de α = 1 y en caso de que exista, calcularla.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{vmatrix} = -a(a^2-1) - 2a = -a^3 + a - 2a = -a(a^2+1) = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

$(a^2+1) \neq 0,\ \forall a \in R$.

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ A = 3}}$$

$$Para\ \ a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 0 \Rightarrow Rango\ \ A = 2}}$$

b)

Para α = 1, según el apartado anterior, la matriz A es inversible.

Para α = 1 es $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to \tfrac{1}{2}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + bz = 0$. Determina los valores de α y b en los siguientes casos:

a) La recta r es perpendicular al plano π.

b) La recta r está contenida en el plano π.

----

a)

Para que la recta r sea perpendicular al plano π es necesario que el vector director de r y el vector normal del plano π sean linealmente dependientes.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (a,\ 4,\ 2)$ y un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ b)$.

Dos vectores son linealmente dependientes cuando sus componentes son proporcionales:

$$\frac{a}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{4}{-1} \ ;;\ -a = 8 \ ;;\ \underline{\underline{a = -8}} \\ \\ \frac{4}{-1} = \frac{2}{b} \ ;;\ 4b = -2 \ ;;\ \underline{\underline{b = -\frac{1}{2}}} \end{cases}.$$

b)

La recta r está contenida en el plano π cuando dos de sus puntos pertenecen al plano.

Un punto de r es A(2, 1, -1).

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + bz = 0 \\ A(2,\ 1,\ -1) \end{array} \right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 2 - 1 - b = 0 \ ;;\ 4 - 1 - b = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 3}}.$$

Otro punto B de r puede obtenerse de la forma siguiente:

$$r \equiv \frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2} = \lambda \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \underline{B(a+2,\ 5,\ 1)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 3z = 0 \\ B(a+2,\ 5,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow\ 2 \cdot (a+2) - 5 + 3 = 0 \ ;;\ 2a + 4 - 2 = 0 \ ;;\ 2a = -2 \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}.$$

****

3º) Sea f la función definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}$. Obtener razonadamente:

a) El dominio y las asíntotas de la función f(x).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x).

c) Realizar un dibujo aproximado de la gráfica de dicha función.

----

a)

$$x^2-5x+6=0 \;;\; x=\frac{5\pm\sqrt{25-2424}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{x_1=2} \;;\; \underline{x_2=3}.$$

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{2,\ 3\}}}$$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales. Son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiene a infinito. $y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-5x+6}=0$.

<u>La recta y = 0 (eje X) es asíntota horizontal de la función.</u>

Verticales. Son de la forma x = k y son los valores finitos que anulan el denominador de la función.

$$x^2-5x+6=0 \;;\; \underline{x_1=2} \;;\; \underline{x_2=3}.$$

<u>Las rectas x = 2 y x = 3 son asíntotas verticales de la función.</u>

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su derivada sea positiva o negativa, respectivamente.

$$\underline{f'(x)=\frac{-2\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}=0 \;;\; 2x-5=0 \;;\; \underline{x=\tfrac{5}{2}}.$$

Como el denominador es positivo para cualquier valor real de x, el signo de la derivada es el mismo que el del numerador.

$$Para \;\; x < \tfrac{5}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Creciente}.$$

$$Para \;\; x > \tfrac{5}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decreciente}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \;\; x \in (-\infty,\ 2) \cup \left(2,\ \tfrac{5}{2}\right)}}.$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \;\; x \in \left(\tfrac{5}{2},\ 3\right) \cup (3,\ \infty)}}.$$

c)

Aunque no se pide y con objeto de facilitar la representación gráfica, se obtienen los máximos y mínimos relativos de la función.

Es condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo y si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right)^2 - (10 - 2x) \cdot 2 \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) \cdot (2x - 5)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^4} =$$

$$= \frac{-2 \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) + 2(10 - 2x)(2x - 5)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^3} = \frac{-2x^2 + 10x - 12 + 2\left(20x - 100 - 2x^2 + 10x\right)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^3} =$$

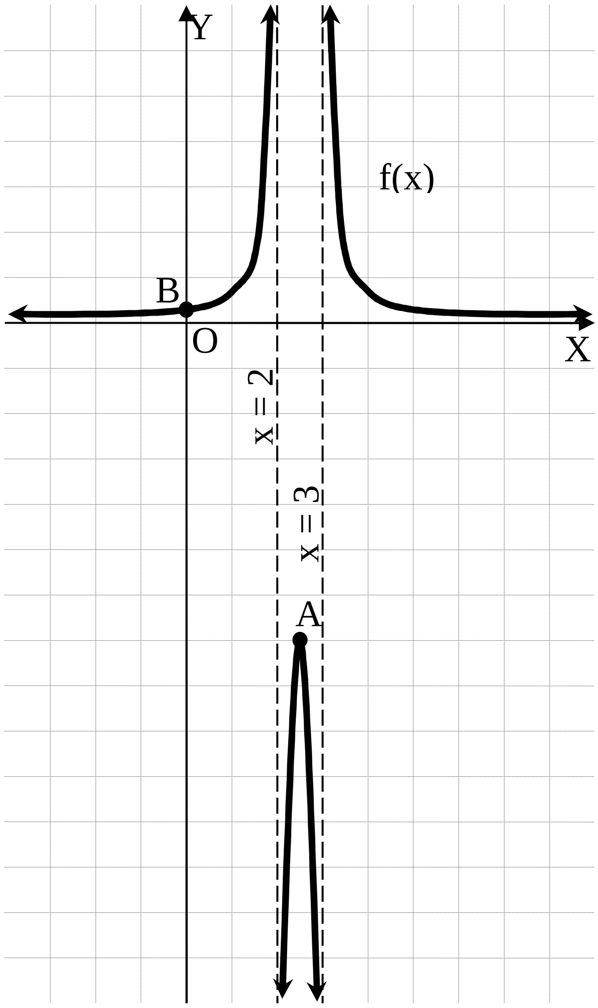
$$= \frac{-2x^2 + 10x - 12 + 60x - 200 - 4x^2}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^3} = \frac{22x^2 + 70x - 212}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^3} = \underline{\frac{2 \cdot \left(11x^2 + 35x - 106\right)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^3} = f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(11 \cdot \frac{25}{4} + 35 \cdot \frac{5}{2} - 106\right)}{\left(\frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6\right)^3} = \frac{2 \cdot \frac{275 + 350 - 424}{4}}{\left(\frac{25 - 50 + 24}{4}\right)^3} = \frac{\frac{201}{2}}{\left(\frac{-1}{4}\right)^3} < 0 \Rightarrow \underline{M\acute{a}ximo \;\; para \;\; x = \frac{5}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8 \Rightarrow \underline{M\acute{a}ximo:\ A\left(\frac{5}{2},\ -8\right)}.$$

La función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$, por ser $f(x) \neq 0,\ \forall x \in D(f)$, no corta al eje de abscisas y corta al eje de ordenadas en el punto $B\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$.

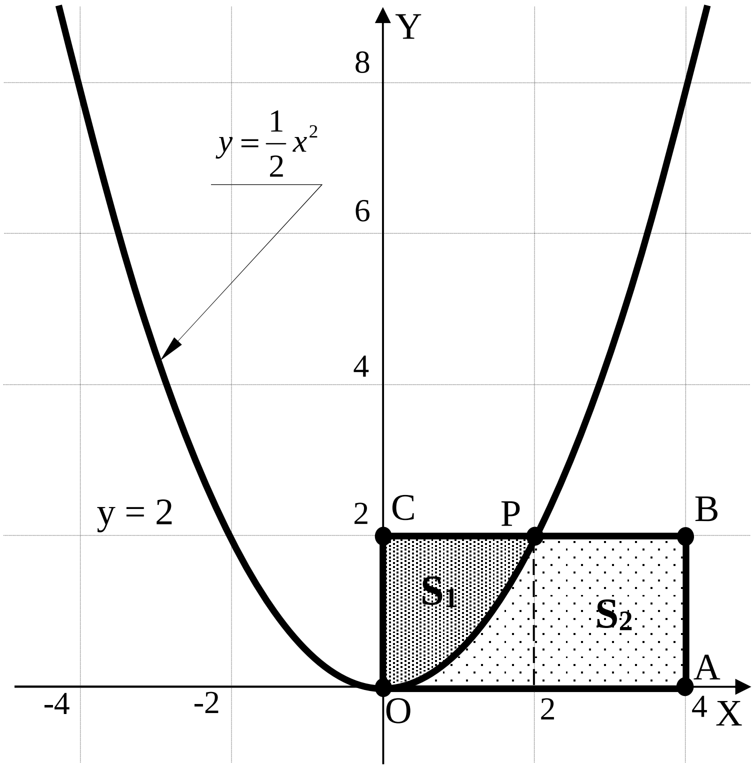
Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica aproximada de la situación, que es la siguiente:



Y
f(x)
B
O
X
x = 2
x = 3
A

****

4º) La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(4,\ 2)$ y $C(0,\ 2)$ en dos recintos. Calcular el área de cada uno de los recintos.



La representación gráfica de la situación es la expresada en la figura.

El punto P es la intersección de la recta y = 2 con la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2\ ;;\ x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{P(2,\ 2)}.$$

De la observación de la figura se deducen las dos superficies pedidas, que son las siguientes:

$$S_1 = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \left(2 \cdot 2 - \frac{2^3}{6}\right) - 0 = 4 - \frac{8}{6} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}\ u^2.$$

$$S_2 = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot dx + \int_2^4 2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + [2x]_2^4 = \left(\frac{2^3}{6}\right) - 0 + 8 - 4 = \frac{8}{6} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}\ u^2$$

****

5º) El número 50! = 1 · 2 · 3 · · · · 48 · 49 · 50. ¿En cuántos ceros acaba?

Los factores que acaban en 0 son 10, 20, 30, 40 y 50, cuyo producto acaba en 5 ceros.

Los únicos productos que producen ceros son los que acaban en 5 y siendo el otro factor cualquiera de los múltiplos de 2: 2, 4, 6 o 8 (siendo el 5 siempre uno de los factores).

Los factores que acaban en 5 son 5, 15, 25, 35 y 45, que al multiplicarlos por cualquiera de los múltiplos de 2, 4, 6 o 8 producen otros cinco ceros.

De lo anterior se concluye que:

<u>50! acaba en 10 ceros.</u>

De otra forma:

Solamente producen ceros en el producto los números terminados en 2, 5 o 0, que son:

2 · 5 · 10 · 12 · 15 · 20 · 22 · 25 · 30 · 32 · 35 · 40 · 42 · 45 · 50

Cada uno de los recintos hace un cero en el producto, que como se observa son 10, lo cual justifica la solución anterior.

El resto de los factores no hacen ceros; son los siguientes:

1 · 3 · 4 · 6 · 7 · 8 · 9 · 11 · 13 · 14 · 16 · 17 · 18 · 19 · 21 · 23 · 24 · 26 · 27 · 28 · 29 · 31 · 33 · 34 · 36 · 37 · 38 · 39 · 41 · 43 · 44 · 46 · 47 · 48 · 49.

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema $\begin{cases} mx+my+2z=m \\ x+(m-2)y=-1 \\ 2y+2z=2 \end{cases}$:

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo, si es posible, para m = 5.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} m & m & 2 & m \\ 1 & m-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2m(m-2)+4-2m=2m^2-4m+4-2m=2m^2-6m+4=0\ ;;$$

$$m^2-3m+2=0\ ;;\ m=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{m_1=1}\ ;;\ \underline{a_2=2}.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}\ \Rightarrow\ Rango\ M\ =Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ \det er\min ado}$$

$$Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \{C_2=C_4\}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ Rango\ M\ =Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ in\det er\min ado}$$

$$Para\ \ m=2\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4+4-4=4\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ \ m=2\ \Rightarrow\ Rango\ M\ =2\ ;;\ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}$$

b)

Resolvemos para m = 5. El sistema resulta $\begin{cases} 5x+5y+2z=5 \\ x+3y=-1 \\ 2y+2z=2 \end{cases}$, que es compatible determinado. Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{2\cdot 5^2-6\cdot 5+4}=\frac{30-4-12+10}{50-30+4}=\frac{40-16}{54-30}=\frac{24}{24}=\underline{\underline{1=x}}\,.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{24}=\frac{-10+4-10}{24}=\frac{4-20}{24}=\frac{-16}{24}=\underline{\underline{-\frac{2}{3}=y}}\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{24}=\frac{30+10+10-10}{24}=\frac{40}{24}=\underline{\underline{\frac{5}{3}=z}}\,.$$

****

2º) Sean el punto A(2, 1, 0) y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=0$.

a) Hallar el punto de π de mínima distancia al punto A y hallar dicha distancia.

b) Encontrar el punto B simétrico de A con respecto al plano π.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(2,\ 3,\ 4)$.

La expresión de la recta r, que pasa por el punto A(2, 1, 0) y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=0$, dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=4\lambda \end{cases}$.

El punto pedido M, intersección de la recta r y el plano π, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y+4z=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=4\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(2+2\lambda)+3\cdot(1+3\lambda)+4\cdot(4\lambda)=0\ ;;\ 4+4\lambda+3+9\lambda+16\lambda=0\ ;;$$

$$29\lambda+7=0 \Rightarrow \underline{\lambda=-\frac{7}{29}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\frac{14}{29}=\frac{58-14}{29}=\frac{44}{29} \\ y=1-\frac{21}{29}=\frac{29-21}{29}=\frac{8}{29} \\ z=-\frac{28}{29} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{M\left(\frac{44}{29},\ \frac{8}{29},\ -\frac{28}{29}\right)}}.$$

La distancia pedida es $\overline{PA}$:

$$\overline{MA}=\sqrt{\left(2-\frac{44}{29}\right)^2+\left(1-\frac{8}{29}\right)^2+\left(0+\frac{28}{29}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{14}{29}\right)^2+\left(\frac{21}{29}\right)^2+\left(\frac{28}{29}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{7\cdot 2}{29}\right)^2+\left(\frac{7\cdot 3}{29}\right)^2+\left(\frac{7\cdot 4}{29}\right)^2}=\frac{7\cdot\sqrt{4+9+16}}{29}=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{29}}{29}\ unidades=\overline{MA}}}.$$

b)

Para que B sea el punto simétrico de A con respecto a π, tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB} \Rightarrow M-A=B-M\ ;;\ \left(\frac{44}{29},\ \frac{8}{29},\ -\frac{28}{29}\right)-(2,\ 1,\ 0)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{44}{29},\ \frac{8}{29},\ -\frac{28}{29}\right);;$$

$$\left(\frac{44}{29}-2,\ \frac{8}{29}-1,\ -\frac{28}{29}\right)=\left(x-\frac{44}{29},\ y-\frac{8}{29},\ z+\frac{28}{29}\right)\ ;;$$

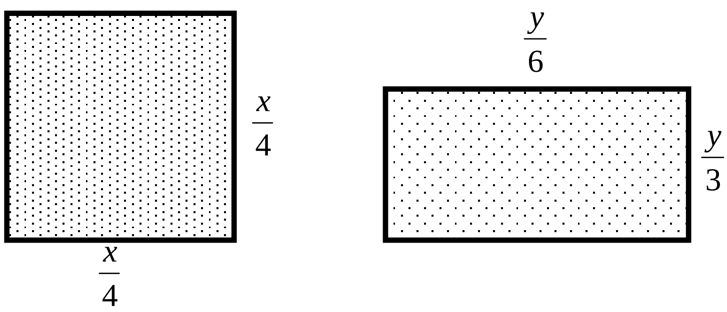
$$\left(\frac{44-58}{29},\ \frac{8-29}{29},\ -\frac{28}{29}\right)=\left(x-\frac{44}{29},\ y-\frac{8}{29},\ z+\frac{28}{29}\right)\ ;;\ \left(\frac{-14}{29},\ \frac{-21}{29},\ -\frac{28}{29}\right)=\left(x-\frac{44}{29},\ y-\frac{8}{29},\ z+\frac{28}{29}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x-\frac{44}{29}=-\frac{14}{29}\ \rightarrow\ \underline{x=\frac{30}{29}} \\ y-\frac{8}{29}=-\frac{21}{29}\ \rightarrow\ \underline{y=-\frac{13}{29}} \\ z+\frac{28}{29}=-\frac{28}{29}\ \rightarrow\ \underline{z=-\frac{56}{29}} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(\frac{30}{29},\ -\frac{13}{29},\ -\frac{56}{29}\right)}}.$$

****

3º) Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con una de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición que la suma de las áreas de cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Sean x e y las longitudes con que se forman el cuadrado y el rectángulo, respectivamente.



$x+y=200\ ;;\ \underline{y=200-x}$.

$$S_T=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{y}{6}\cdot\frac{y}{3}=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{18}=\frac{x^2}{16}+\frac{(200-x)^2}{18}=\frac{9x^2+8\left(40000-400x+x^2\right)}{144}=$$

$$=\frac{9x^2+8x^2+320000-3200x}{144}=\underline{\frac{17x^2-3200x+320000}{144}=S_T}\ .$$

$$S'_T=\frac{34x-3200}{144}=\frac{17x-1600}{72}\Rightarrow S'_T=0\Rightarrow\frac{17x-1600}{72}=0\ ;;\ 17x-1600=0\ ;;\ \underline{x=\frac{1600}{17}}\ .$$

$S''_T=\dfrac{17}{72}>0\ \Rightarrow$ Justificación de que se trata de un mínimo para el área.

$$\underline{\underline{x=\frac{1600}{17}\ cm}}\ ;;\ y=200-x=200-\frac{1600}{17}=\frac{3400-1600}{17}=\underline{\underline{\frac{1800}{17}\ cm=y}}\ .$$

****

4º) Calcular la siguiente integral en función de α y b: $I = \int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} \cdot dx$.

$$x^2-3x+2=0 \;;;\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x^2-3x+2=(x-1)(x-2)}.$$

$$I=\int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} \cdot dx=\int \frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} \cdot dx \Rightarrow \frac{ax+b}{x^2-3x+2}=\frac{ax+b}{(x-1)(x-2)}=\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}=$$

$$=\frac{Mx-2M+Nx-N}{(x-1)(x-2)}=\frac{(M+N)x+(-2M-N)}{x^2-3x+2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=a \\ -2M-N=b \end{array}\right\} \Rightarrow -M=a+b \;;;\; \underline{M=-a-b} \;;;$$

$$M+N=a \;;;\; N=a-M=a+a+b \Rightarrow \underline{N=2a+b}.$$

$$I=\int \left(\frac{-a-b}{x-1}+\frac{2a+b}{x-2} \right) \cdot dx=\underline{\underline{(2a+b)L|x-2|-(a+b)L|x-1|+C}}.$$

****

5º) En la sucesión de los 210 primeros números naturales: 1, 2, 3, · · · · · , 210 se suprimen los múltiplos de 7. Calcular razonadamente la suma de los términos restantes.

La suma de los términos de una progresión aritmética viene dada por la siguiente fórmula: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

La suma de los 210 primeros números naturales es:

$$S_{210} = \frac{(1+210) \cdot 210}{2} = 211 \cdot 105 = \underline{22.155}.$$

La sucesión de los múltiplos de 7 entre la sucesión dada tiene como primer término al 7 y el último el 210. Para determinar el número de sus términos tenemos en cuenta la fórmula general de una progresión aritmética, que es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Sabiendo que la diferencia es 7, es número de términos es: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{210-7}{7} + 1 = 30 - 1 + 1 = 30$.

La suma de los múltiplos de 7 es:

$$S_{\dot{7}} = \frac{(7+210) \cdot 30}{2} = 217 \cdot 15 = \underline{3.255}.$$

La suma pedida es la diferencia entre las dos sumas halladas:

$$S = S_{210} - S_{\dot{7}} = 22.155 - 3.255 = \underline{18.900}.$$

<u>La suma de los términos restantes es 18.900.</u>

****