PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$.

a) Discutirlo según los valores del parámetro α.

b) Resolver el sistema cuando tenga más de una solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-a-2a-4-1-4+2a^2=2a^2-3a-9=0 \;;;\; a=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=$$

$$=\frac{3\pm 9}{4} \Rightarrow \underline{a_1=3} \;;;\; \underline{a_2=-\frac{3}{2}}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 3 \\ a\neq -\frac{3}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado$$

$$Para\ \ \alpha=3\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\ \{C_3=C_4\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}\,.$$

$$\underline{Para\ \ a=3\ \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ in\det er\min ado}$$

$$Para\ \ \alpha=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1\\ \frac{3}{2} & -1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ \frac{3}{2} & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(-6-6-8-2-8+18)=-6\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}\,.$$

$$\underline{Para\ \ a=-\tfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ \ Rango\ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ \ Incompatible}$$

b)

El sistema tiene más de una solución para α = 3. El sistema resulta $\begin{cases}x-2y-z=-1\\ 3x-y+2z=2\\ x+2y+3z=3\end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z=\lambda$, resulta:

$$\begin{cases}x-2y=-1+\lambda\\ x+2y=3-3\lambda\end{cases}\Rightarrow 2x=2-2\lambda\ ;;\ \underline{x=1-\lambda}\ ;;\ 2y=x+1-\lambda=1-\lambda+1-\lambda=2-2\lambda\Rightarrow\underline{y=1-\lambda}\,.$$

$$Solución:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=1-\lambda\ ;\ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}$$

****

2º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+Az=0$.

a) Calcular el valor de A para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Obtener un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

----

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x-3y=-1-4\lambda \\ 3x-2y=-3-\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -8x+6y=2+8\lambda \\ 9x-6y=-9-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=-7+5\lambda}.$$

$$\begin{cases} 4x-3y=-1-4\lambda \\ 3x-2y=-3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -12x+9y=3+12\lambda \\ 12x-8y=-12-4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=-9+8\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(5,\ 8,\ 1)$ y un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(2,\ -1,\ A)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}=0 \Rightarrow (5,\ 8,\ 1)\cdot(2,\ -1,\ A)=0 \;;\; 10-8+A=0 \;;\; 2+A=0 \Rightarrow \underline{A=-2}.$$

La recta r y el plano π son paralelos para A = -2.

b)

El haz de planos β perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 5x+8y+z+D=0$.

De los infinitos plano del haz β, el plano ψ que contiene al origen de coordenadas es el que satisface su ecuación para el punto O(0, 0, 0), es decir, el que carece de término independiente:

El plano perpendicular a r que contiene al origen de coordenadas es ψ≡5x + 8y + z = 0.

****

3º) Sea f la función $f(x)=ax^3+bx+c$:

a) Obtener los valores de α, b y c para que pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto P(1, -1).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos?

----

a)

Por contener la función $f(x)=ax^3+bx+c$ al origen de coordenadas es c = 0.

Una función tiene un mínimo relativo para los valores de x que anulan su primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$f'(x)=3ax^2+b \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow \underline{3a+b=0}$. (1)

Por contener la función al punto P es $f(1)=-1 \Rightarrow \underline{a+b=-1}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3a+b=0 \\ a+b=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a+b=0 \\ -a-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a=1\ ;;\ \underline{a=\frac{1}{2}}\ ;;\ \frac{1}{2}+b=-1 \Rightarrow \underline{b=-\frac{3}{2}}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2},\ c=0}}.$$

b)

La función resulta $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$. Vamos a ver si tiene otros máximos o mínimos relativos:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \underline{x_1=1}\ ;;\ \underline{x_2=-1}.$$

Se sabe que tiene un mínimo relativo para x = 1 en el punto P(1, -1).

Se comprueba que se trata de un mínimo por ser $f''(x)=3x$ y $f''(1)=3>0$.

Para x_2 = -1 es $f''(-1)=-3<0 \Rightarrow$ Máximo relativo para x = -1.

$$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1 \Rightarrow \underline{Máximo:\ Q(-1,\ 1)}.$$

Como hemos demostrado, f tiene también un máximo en el punto Q(-1, 1).

Sabiendo que $f(-x)=\frac{1}{2}\cdot(-x)^3-\frac{3}{2}\cdot(-x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x=-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)=-f(x)$, o sea, que $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$ es simétrica con respecto al origen, si tiene un mínimo relativo en el punto P(1, -1), necesariamente tenía que tener un máximo relativo en Q(-1, 1), lo que es otra forma de comprobar lo pedido en la segunda parte del apartado.

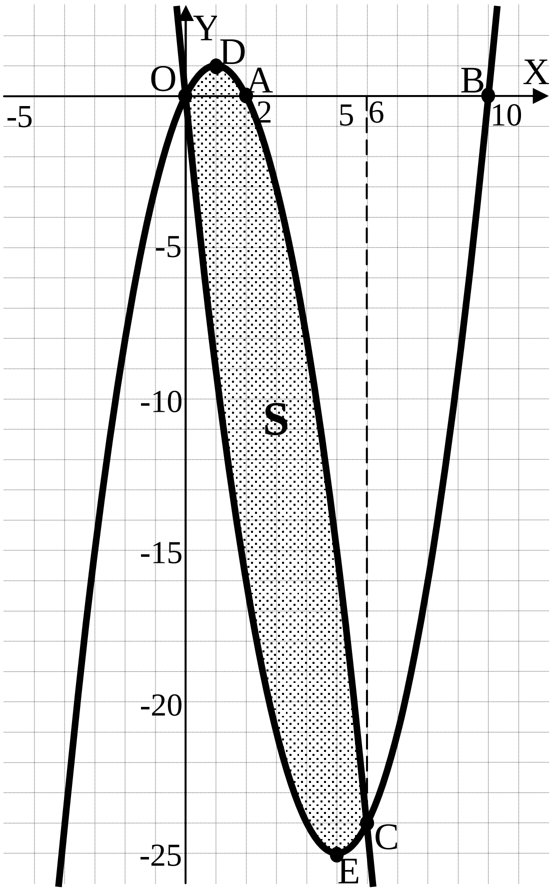
****

4º) Considera el recinto limitado por la curva $y=-x^2+2x$ y por la curva $y=x^2-10x$:

a) Dibujar el recinto. b) Calcular el área del recinto.

----

a)



Los puntos de corte de cada función con los ejes son los siguientes:

$$y=-x^2+2x=0 \Rightarrow -x(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \end{cases}.$$

$$y=x^2-10x=0 \Rightarrow x(x-10)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=10 \rightarrow \underline{B(10,\ 0)} \end{cases}.$$

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen igualándolas:

$$-x^2+2x=x^2-10x\ ;;\ 2x^2-12x=0\ ;;\ 2x(x-6)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2=6 \rightarrow \underline{C(6,\ -24)} \end{cases}.$$

Los vértices de las parábolas son los siguientes:

$$y=-x^2+2x \Rightarrow \begin{cases} y'=-2x+2=0 \rightarrow x=1 \Rightarrow y(1)=-1^2+2=-1+2=1 \\ y''=-2>0 \Rightarrow \underline{Màximo\ \ para\ \ x=1} \Rightarrow \underline{D(1,\ 1)} \end{cases}.$$

$$y=x^2-10x \Rightarrow \begin{cases} y'=2x-10=0 \rightarrow x=5 \Rightarrow y(5)=5^2-10\cdot 5=25-50=-25 \\ y''=2>0 \Rightarrow \underline{Mìnimo\ \ para\ \ x=5} \Rightarrow \underline{E(5,\ -25)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura adjunta.

b)

Para el cálculo del área se tiene en cuenta que las ordenadas de la función $y=-x^2+2x$ son iguales o mayores que las correspondientes a la función $y=x^2-10x$ en el intervalo del área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^6\left[\left(-x^2+2x\right)-\left(x^2-10x\right)\right]\cdot dx=\int_0^6\left(-2x^2+12x\right)\cdot dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{12x^2}{2}\right]_0^6=\left[-\frac{2x^3}{3}+6x^2\right]_0^6=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 6^3}{3}+6\cdot 6^2\right)-0=6^3\left(-\frac{2}{3}+1\right)=6^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{6^2\cdot 6}{3}=36\cdot 2=\underline{\underline{72\ u^2=S}}\,.$$

****

5º) Sea N el número $N = 2^a \cdot 3^b$. Obtener el dígito correspondiente a las unidades de N en los siguientes casos:

a) α = 2014, b = 2014. b) α = 800, b = 805.

----

a)

Para α = 2014 y b = 2014 es $N = 2^{2014} \cdot 3^{2014} = (2 \cdot 3)^{2014} = 6^{2014}$.

Teniendo en cuenta que la cifra de las unidades de las sucesivas potencias de 6 es siempre 6:

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 2014\ \ y\ \ b = 2014\ \ las\ \ unidades\ \ de\ \ N\ \ es\ \ 6}}$$

b)

Para α = 800 y b = 805 es $N = 2^{800} \cdot 3^{805}$.

Las potencias sucesivas de 2 tienen las siguientes unidades:

$2^1 = 2 \to 2$ $2^2 = 4 \to 4$ $2^3 = 8 \to 8$ $2^4 = 16 \to 6$

$2^5 = 32 \to 2$ $2^6 = 64 \to 4$ $2^7 = 128 \to 8$ $2^8 = 526 \to 26$

En general 2^n termina en una unidad que depende del resto de la división de n entre 4: si el resto es 0, termina en 6; si es 1, termina en 2; si el resto es 2, termina en 4 y, por último, si es 3, termina en 8.

$2^{800} \to$ El resto de dividir 800 entre cuatro es 0 → <u>termina en 2</u>.

Las potencias sucesivas de 3 tienen las siguientes unidades:

$3^1 = 3 \to 3$ $3^2 = 9 \to 9$ $3^3 = 27 \to 7$ $3^4 = 81 \to 1$

$3^5 = 243 \to 3$ $2^6 = 729 \to 9$ $2^7 = 2187 \to 7$ $2^8 = 6561 \to 1$

En general 3^n termina en una unidad que depende del resto de la división de n entre 4: si el resto es 0, termina en 1; si es 1, termina en 3; si el resto es 2, termina en 9 y, por último, si es 3, termina en 7.

$3^{805} \to$ El resto de dividir 805 entre cuatro es 1 → <u>termina en 3</u>.

$N = 2^{800} \cdot 3^{805} \Rightarrow 2 \cdot 3 = \underline{6}$.

<u>Para α = 800 y b = 805 N termina en 6</u>.

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para α = -2, y en caso de que no sea posible razonar porqué.

----

a)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a^2-a^2-a^2=1-a^2=0 \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;;;\; \underline{a_2=1}.$$

La matriz A no tiene inversa para α = -1 y α = 1.

b)

Para α = -2 es $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La hallamos utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2+2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{3}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1+2F_2 \\ F_3 \to F_3+2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1-F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

****

2º) Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_2 \equiv 4x-3y+9=0$.

La expresión de un punto genérico de r es $P(2+2\lambda,\ -1+3\lambda,\ 2+2\lambda)$.

Sabiendo que la distancia del punto genérico $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto P y a los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_2 \equiv 4x-3y+9=0$:

$$d(P,\ \pi_1) = d(P,\ \pi_1) = \frac{|3(2+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|4(2+2\lambda)-3(-1+3\lambda)+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}} \ ;;$$

$$\frac{|6+6\lambda-4+12\lambda-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|8+8\lambda+3-9\lambda+9|}{\sqrt{16+9}} \ ;;\ |18\lambda+1| = |-\lambda+20| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 18\lambda+1=-\lambda+20 \\ 18\lambda+1=\lambda-20 \end{array}\right\} \ ;;$$

$$\left.\begin{array}{l} 19\lambda=19 \\ 17\lambda=-21 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lambda_1=1} \ ;;\ \underline{\lambda_2=-\frac{21}{17}}.$$

$$P_1(2+2\cdot 1,\ -1+3\cdot 1,\ 2+2\cdot 1) \Rightarrow \underline{\underline{P_1(4,\ 2,\ 4)}}.$$

$$P_2\left(2+2\cdot\frac{-21}{17},\ -1+3\cdot\frac{-21}{17},\ 2+2\cdot\frac{-21}{17}\right) \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{8}{17},\ -\frac{80}{17},\ \frac{-8}{17}\right)}}.$$

****

3º) Se sabe que la función F es derivable en todos los puntos, y que está definida en el intervalo $(-\infty,\ 0]$ por la fórmula $F(x)=1+2x+Ax^2$ y en el intervalo $(0,\ \infty)$ por la fórmula $F(x)=B+Ax$.

a) Encontrar los valores de A y B para que se verifiquen las condiciones anteriores.

b) Representar F.

----

a)

La función F(x) puede expresarse de la forma: $F(x)=\begin{cases} 1+2x+Ax^2 & si\ \ x\le 0 \\ B+Ax & si\ \ x>0 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en cualquier punto es condición necesaria que sea continua en todos los puntos. Para que la función F(x) sea derivable en x = 0 es necesario que sea continua en ese punto.

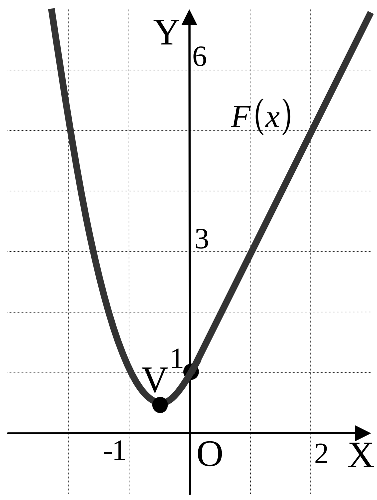
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x+Ax^2\right)=\underline{1}=F(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0}(B+Ax)=\underline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{B=1}}.$$

La condición de derivabilidad de una función en un punto es que los sea por la izquierda y por la derecha y que ambas derivadas sean iguales; para x = 0 tiene que ser:

$$F'(x)=\begin{cases} 2+2Ax & si\ \ x\le 0 \\ A & si\ \ x>0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F'(0^-)=2 \\ F'(0^+)=A \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A=2}}$$

b)

La función resulta $F(x)=\begin{cases} 1+2x+2x^2 & si\ \ x\le 0 \\ 1+2x & si\ \ x>0 \end{cases}$.



El vértice V (mínimo) es el punto siguiente:

$$g(x)=1+2x+2x^2 \Rightarrow g'(x)=2+4x=0 \Rightarrow \underline{x=-\frac{1}{2}}.$$

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right)=1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{V\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}.$$

La representación gráfica de la función, aproximada, es la que indica la figura.

****

4º) Calcular las integrales definidas que siguen, explicando el método de resolución.

a) $A = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx$. b) $B = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$.

----

a)

$$A = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(3x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{3}\, sen\,(3x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left[\frac{1}{3}\, sen\,(3x) \right] - \int \frac{1}{3}\, sen\,(3x) \cdot dx = \frac{x}{3}\, sen\,(3x) - \frac{1}{3} \int sen\,(3x) \cdot dx = \underline{\frac{x}{3}\, sen\,(3x) - \frac{1}{3} M = A}. \quad (*)$$

$$M = \int sen\,(3x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x = t \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \int sen\, t \cdot dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = \underline{-\frac{1}{3} \cos(3x) + C = M}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de M en (*) queda:

$$A = \frac{x}{3}\, sen\,(3x) - \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right] + C = \underline{\underline{\frac{1}{9} [3x \cdot sen\,(3x) + \cos(3x)] + C}}.$$

b)

$$B = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;;;\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{x^2 + x - 3 = (x-1)(x+3)}.$$

$$B = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \cdot dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{Ax + 3A + Bx - B}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A - B)}{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} A + B = 0 \\ 3A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4A = 1 \;;;\; \underline{A = \frac{1}{4}} \;;;\; \underline{B = -\frac{1}{4}}.$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+3} \right) \cdot dx = \frac{1}{4} L|x-1| - \frac{1}{4} L|x+3| + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} L \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C = B}}.$$

****

5º) Un comercio ha adquirido una partida de armarios y mesas. Los armarios han costado 649 euros cada uno de ellos y las mesas 132 euros cada una. El responsable del comercio no recuerda se el precio total ha sido de 2.761 o 2.716 euros.

a) ¿Cuánto ha pagado exactamente? Razona la respuesta.

b) ¿Cuántos armarios y mesas ha comprado exactamente.

----

a)

El número máximo de armarios que pudo comprar es 4.

4 armarios y una mesa valen $4 \cdot 649 + 132 = 2.596 + 132 = 2.728 \rightarrow$ No es posible.

Suposiciones:

1ª- 3 armarios, que cuestan $3 \cdot 649 = 1.947$ euros.

$$\left.\begin{array}{l} 2.761 - 1.947 = 814 \rightarrow \dfrac{814}{132} = 6'.... \\ 2.716 - 1.947 = 769 \rightarrow \dfrac{769}{132} = 5'.... \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ No es posible.}$$

2ª- 2 armarios, que cuestan $2 \cdot 649 = 1.298$ euros.

$$\left.\begin{array}{l} 2.761 - 1.298 = 1.463 \rightarrow \dfrac{1.463}{132} = 11'.... \\ 2.716 - 1.298 = 1.418 \rightarrow \dfrac{1.418}{132} = 10'.... \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ No es posible.}$$

3ª- 1 armarios, que cuesta 649 euros.

$$\left.\begin{array}{l} 2.761 - 649 = 2.112 \rightarrow \dfrac{2.112}{132} = \underline{16} \\ 2.716 - 649 = 2.067 \rightarrow \dfrac{2.067}{132} = 15'.... \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Si es posible.}$$

La cantidad que ha pagado han sido 2.761 euros.

b)

Ha comprado un armario y 16 mesas.

****