PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ calcular qué valor debe tener x para que la matriz inversa de A coincida con la opuesta de A (esto es, $A^{-1} = -A$).

Por el concepto de matriz inversa: $A \cdot A^{-1} = I$; como es $A^{-1} = -A \Rightarrow A \cdot (-A) = I$:

$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 10 - x^2 & 0 \\ 0 & 10 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 10 - x^2 = 1$;

$x^2 = 9 \Rightarrow \underline{x = \pm 3}$.

****

2º) Considera los puntos A (2, 1, 2), B (0, 4, 1) y la recta $r \equiv x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$.

a) Calcula un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

----

a)

Los puntos A (2, 1, 2), B (0, 4, 1) determinan el vector $\overrightarrow{BA} = (2, -3, 1)$.

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M\left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

El haz de planos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$, es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$ y el plano α, perteneciente al haz β, que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \\ M\left(1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + D = 0\,;;$$

$$2 - \frac{15}{2} + \frac{3}{2} + D = 0\,;;\, 2 - 6 + D = 0 \;\Rightarrow D = 4.$$

$$\underline{a \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0}$$

b)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1,2)$, que también es vector normal del haz de planos χ perpendiculares a la recta r, cuya expresión general es de la forma $\chi \equiv x + y + 2z + N = 0$.

El plano μ, perteneciente al haz χ, que contiene al punto A (2, 1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \chi \equiv x + y + 2z + N = 0 \\ A(2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 1 + 2 \cdot 2 + N = 0 \;\Rightarrow\; N = -7.$$

$$\underline{\mu \equiv x + y + 2z - 7 = 0}$$

****

3º) Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierre una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro de marco en los lados horizontales es de 1,5 €, mientras que en los lados verticales es de 2,7 €. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.

Siendo x la longitud de los lados horizontales e y la longitud de los lados verticales, el coste del marco es: Coste = C = 2 · 150 · x + 2 · 270 · y, teniendo en cuenta que un metro de marco horizontal cuesta 150 € y un metro de marco vertical cuesta 270 €.

Como la superficie es de 5 metros cuadrados es $x \cdot y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{x}$.

El coste en función de x es el siguiente:

$$C(x) = 300x + 540 \cdot y = 300x + 540 \cdot \frac{5}{x} = \frac{300x^2+2.700}{x}.$$

Para que el coste sea mínimo tiene que anularse su primera derivada:

$$C'^{(x)} = \frac{600x \cdot x - (300x^2 + 2.700) \cdot 1}{x^2} = \frac{600x^2 - 300x^2 - 2.700}{x^2} =$$

$$= \frac{300x^2-2.700}{x^2} = 0 \Rightarrow 300x^2 = 2.700\ ;;\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Por carecer de sentido lógico la solución negativa, es x = 3 m e $y = \frac{5}{3} \cong 1{,}67\ m$.

$$\underline{El\ marco\ más\ barato\ tiene\ 3\ metros\ de\ base\ y\ 1{,}67\ metros\ de\ altura.}$$

****

4º) Calcula la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & +x & -1 & x^2-5x \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +10x^2 & & & 2x+10 \\
\cline{1-4}
0 & +10x^2 & +x & -1 & \\
 & -10x^2 & +50x & & \\
\cline{1-4}
 & 0 & +51x & -1 &
\end{array}
$$

$$I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx = \int \left(2x + 10 + \frac{51x-1}{x^2-5x}\right) \cdot dx =$$

$$= 2\int x \cdot dx + 10\int dx + \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \cdot dx = \frac{2x^2}{2} + 10x + I_1 = I.$$

$$I_1 = \int \frac{51x-1}{x^2-5x} \cdot dx \Rightarrow \frac{51x-1}{x^2-5x} = \frac{51x-1}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} = \frac{Ax-5A+Bx}{x(x-5)} = \frac{(A+B)x+(-5A)}{x^2-5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A + B = 51 \\ -5A = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow B = 51 - \frac{1}{5} = \frac{255-1}{5} = \frac{254}{5} = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x} + \frac{\frac{254}{5}}{x-5}\right) = \frac{1}{5}Lx + \frac{254}{5}L(x-5).$$

$$\underline{I = \int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} \cdot dx = x^2 + 10x + \frac{1}{5}Lx + \frac{254}{5}L(x-5) + C.}$$

****

5º) Una caja contiene monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos. En total hay 350 monedas. El número de monedas de 50 céntimos es el doble que el de monedas de 10 céntimos. Si en total hay 90 euros, ¿cuántas monedas hay de cada clase?

Sean x, y, z el número de monedas que contiene la caja de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=300 \\ z=2x \\ 0{,}1x+0{,}2y+0{,}5z=90 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y+z=300 \\ z=2x \\ x+2y+5z=900 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} x+y+2x=300 \\ x+2y+10x=900 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 3x+y=300 \\ 11x+2y=900 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} -6x-2y=-600 \\ 11x+2y=900 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; 5x=300 \;\; ;; \;\; x=60.$$

$$z=120 \;\; ;; \;\; 60+y+120=300 \;\; ;; \;\; y=300-180=120.$$

$$\underline{Hay\ 60\ monedas\ de\ 10\ céntimos, 120\ de\ 20\ céntimos\ y\ 120\ de\ 50\ céntimos.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones $\begin{cases} mx + my = 1 \\ 3x + mz = m - 2 \\ -y + z = m - 3 \end{cases}$. ¿Existen casos de indeterminación? Si la respuesta es afirmativa resolver el sistema en esos casos. Si es negativa explicar por qué.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} m & m & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} m & m & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es:

$$Rang\ M = \begin{vmatrix} m & m & 0 \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m = m(3 - m) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 3\ .$$

Para m ≠ 0 y m ≠ 3, Rang M = Rang M' = 3 = nº incóg. ⇒ Compatible determinado.

Para m = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. El rango de M' para m = 0 es 3 por ser el determinante $\{C_1, C_3, C_4\} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Para m = 0, Rang M =2, Rang M' = 3 ⇒ Incompatible.

Para m = 3 es $M' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2 por ser la primera columna igual a tres veces la cuarta.

$$\underline{Para\ m = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Existe indeterminación para m = 3, como acabamos de probar; las soluciones son las siguientes:

Para m = 3 el sistema resulta: $\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$. Haciendo y = z = λ:

$$Solución: \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R.$$

****

2º) a) Determinar el valor del parámetro α para que la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + (a+1)(y-3) + a(z-1) = 0$ sean paralelos.

b) ¿Pertenece el punto P (1, 0, -3) al plano obtenido en el apartado anterior?

----

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos, el vector director de la recta tiene que ser perpendicular al vector normal del plano.

Un vector director de la recta es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{v_1} = (3, 1, -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 4)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a+1, a)$ y un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 2j + 3k - 2k + i - 12j = 5i - 14j + k = (5, -14, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (5, -14, 1) \cdot (2, a+1, a) = 0\ ;;\ 10 - 14a - 14 + a = 0\ ;;$$

$$-4 - 13a = 0 \Rightarrow \underline{a = -\tfrac{4}{13}}.$$

b)

El plano π resulta ser: $\pi \equiv 2x + \left(-\frac{4}{13} + 1\right)(y-3) - \frac{4}{13}(z-1) = 0$;;

$$26x + 9(y-3) - 4(z-1) = 0\ ;;\ 26x + 9y - 27 - 4z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 26x + 9y - 4z - 23 = 0.$$

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 26x + 9y - 4z - 23 = 0 \\ P(1, 0, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow 26 + 0 - 4 \cdot (-3) - 23 = 0,\ \ 26 + 12 - 23 \neq 0.$$

$$\underline{El\ punto\ P\ no\ pertenece\ al\ plano\ \pi.}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$:

a) Hallar los valores de α y b sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función, por ser polinómica, es continua en R, excepto para x = 2 cuya continuidad vamos a forzar determinando los adecuados valores de los parámetros α y b.

Una función es continua en un punto cuando se cumple que sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - bx - 4) = 4 - 2b - 4 = -2b \end{cases}\right\} \Rightarrow 4a + 6 = -2b \,;;\, 2a + b = -3. \quad (1)$$

Para que la función sea derivable para x = 2, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si \quad x \leq 2 \\ 2x - b & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow$$

$$4a + 3 = 4 - b, \; 4a + b = 1. \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan el sistema cuyas soluciones son los valores pedidos:

$$\left.\begin{matrix} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2a - b = 3 \\ 4a + b = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}. \quad 4 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = -7}.$$

b)

Para x = 1 la función es $f(x) = 2x^2 + 3x$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x) = 4x + 3 \;\Rightarrow\; m = f'(1) = 4 + 3 = 7.$

El punto de tangencia es: $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \;\Rightarrow\; P(1, 7).$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$;

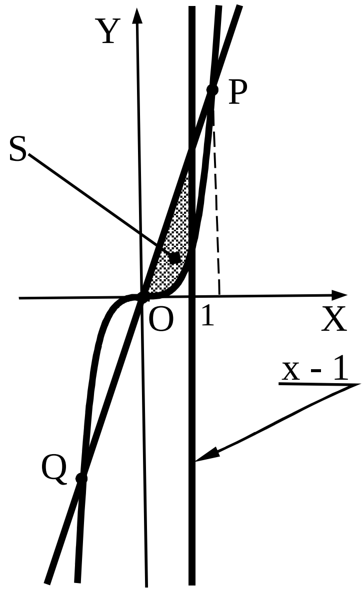
aplicada al caso de este ejercicio:

$$y - 7 = 7(x - 1) = 7x - 7 \;\Rightarrow\; \underline{Tangente\colon\; t \equiv 7x - y = 0}.$$

****

4º) Representar gráficamente la región del plano limitado por la curva $y = 2x^3$, la recta tangente a la gráfica de dicha función en el origen de coordenadas y la recta x = 1. Calcular el área de dicha región.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que la primera derivada de la función en ese punto.



$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(1) = m = 3.$

La recta tangente es $y = 3x$.

Los puntos de corte de la función y la tangente se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{c} y = 2x^3 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^3 = 3x \,;;\, 2x^3 - 3x = 0 \,;;$$

$$x(2x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \longrightarrow O(0,0) \\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow P\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \\ x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \end{cases}.$$

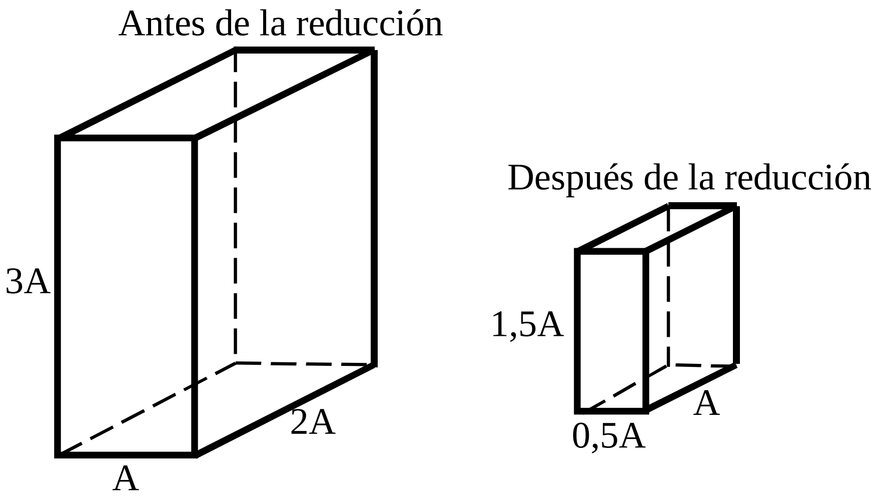
El valor de la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 (3x - 2x^3) \cdot dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\, u^2}$$

****

5º) Una caja (prisma rectangular) tiene por dimensiones A, 2A y 3A. Si disminuimos cada una de sus dimensiones en un 50 %, ¿el volumen habrá disminuido en un 50 %? ¿Y el área total habrá disminuido en un 50 %? Razona las respuestas.



El volumen antes de la reducción es: $V_1 = A \cdot 2A \cdot 3A = 6A^3$.

El volumen después de la reducción es: $V_2 = 0{,}5A \cdot A \cdot 1{,}5A = 0{,}75A^3$.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0{,}75A^3}{6A^3} = 0{,}125 = \frac{1}{8} \Rightarrow$ El volumen se ha reducido a un octavo (12,5 %).

La superficie antes de la reducción es:

$S_1 = 2 \cdot [(A \cdot 2A) + (A \cdot 3A) + (2A \cdot 3A)] = 2 \cdot (2A^2 + 3A^2 + 6A^2) = 22A^2$.

La superficie después de la reducción es:

$S_2 = 2 \cdot [(0{,}5A \cdot A) + (0{,}5A \cdot 1{,}5A) + (A \cdot 1{,}5A)] =$

$= 2 \cdot (0{,}5A^2 + 0{,}75A^2 + 1{,}5A^2) = 2 \cdot 2{,}75A^2 = 5{,}5A^2$.

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{5{,}5A^2}{22A^2} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$.

$\underline{La\ superficie\ se\ ha\ reducido\ a\ un\ cuarto\ (25\ \%).}$

****