PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$. Calcular de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}. \qquad B = \begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}.$$

$$A = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0}.$$

$$B = \begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 = \underline{60}.$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1.- “Si todos los elementos de una línea de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial".

2.- "Si una matriz cuadrada tiene dos filas iguales o proporcionales su determinante es cero".

3.- "Si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número".

4.- "Si se intercambian entre sí dos líneas de un determinante, el valor del determinante cambia de signo".

****

2º) a) Halla la ecuación de plano que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{b}=(1,3,5)$.

b) Calcular el valor de m para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $\pi \equiv mx-y+5z=8$ sean perpendiculares.

----

a)

La ecuación general o implícitas del plano pedido es la siguiente:

$$\beta(P;\ \vec{a},\vec{b}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-10(x+1)-3(y-2)-3(z-3)+2(z-3)+9(x+1)+5(y-2)=0;$$

$$-(x+1)+2(y-2)-(z-3)=0;\ -x-1+2y-4-z+3=0.$$

$$\underline{\beta \equiv x-2y+z+2=0}.$$

b)

Un vector normal del plano β es $\overrightarrow{n_\beta}=(1,-2,1)$ y un vector normal del plano $\pi \equiv mx-y+5z=8$ es $\overrightarrow{n_\pi}=(m,-1,5)$.

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{n_\beta}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=0 \Rightarrow (1,-2,1)\cdot(m,-1,5)=0;\ \ m+2+5=0 \Rightarrow \boldsymbol{m=-7}.$$

$$\underline{Para\ que\ los\ planos\ \beta\ y\ \pi\ sean\ perpendiculares\ tiene\ que\ ser\ m=-7.}$$

****

3º) Dado el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Determinar los coeficientes reales $a, b\ y\ c$ sabiendo que tiene extremos relativos en $x=-1$ y en $x=1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

----

a)

Por pasar por el origen de coordenadas: $P(0)=0 \Rightarrow \underline{c=0}$.

La condición necesaria para que un polinomio (función) tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

$P'(x)=3x^2+2ax+b.$

$P'(-1)=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b=0;\ \ 3-2a+b=0;\ \boldsymbol{-2a+b=-3}.$

$P'(1)=0 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0;\ \ 3+2a+b=0;\ \boldsymbol{2a+b=-3}.$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{r}-2a+b=-3\\ 2a+b=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=0},\ \underline{b=-3}.$$

El polinomio resulta: $\underline{P(x)=x^3-3x}$.

b)

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$P'(x)=3x^2-3. \qquad P''(x)=6x.$

$P'(-1)=6\cdot(-1)=-6<0 \Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo\ para\ x=-1}.$

$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-1,2)}.$

$P'(1)=6\cdot 1=6>0 \Rightarrow \boldsymbol{Mínmo\ relativo\ para\ x=1}.$

$P(1)=1^3-3\cdot 1=1-3=-2 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: Q(1,-2)}.$

Con los datos obtenidos y teniendo en cuenta que $P(x)$ es una función continua en R por ser polinómica y cuyos puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \ \rightarrow \boldsymbol{O(0,0)}$.

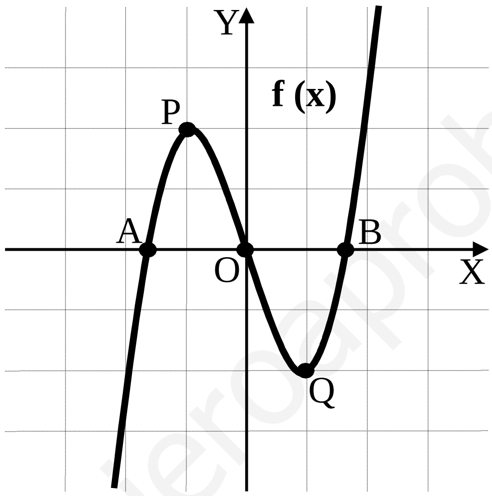
Eje X $\Rightarrow f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x^3 - 3x = 0; \ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$.

Los puntos de corte son: $O(0,0), A\left(-\sqrt{3},0\right), B\left(\sqrt{3},0\right)$.

También conviene observar que $f(x)$ es impar, por ser $f(-x) = -f(x)$, o sea, que es simétrica con respecto al origen.

Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

La representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



****

4º) Dibujar la región encerrada por las siguientes parábolas: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$ y calcular el área de dicho recinto.

Los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5\ ;\ 2x^2 - 2x - 4 = 0\ ;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$$

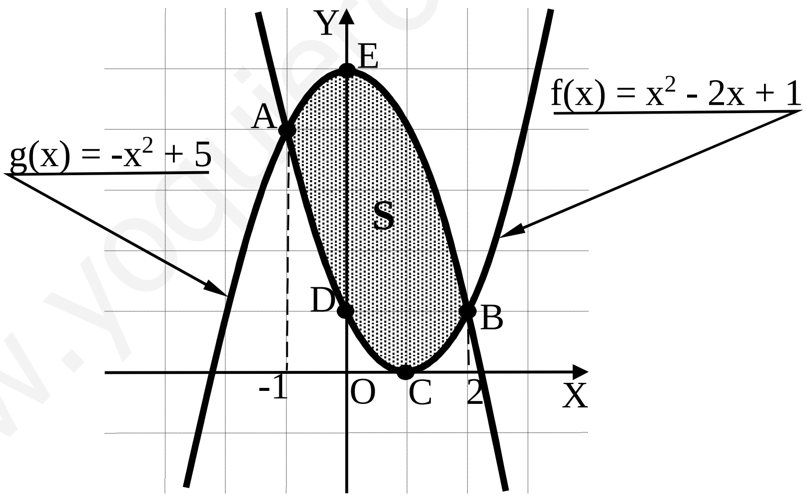
$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,4)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{B(2,1)} \end{cases}.$$

El vértice de la parábola convexa $(\cup) \rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1$ es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1,0)$, que es punto de corte con el eje X.

El vértice de la parábola cóncava $(\cap) \rightarrow g(x) = -x^2 + 5$ es el siguiente:

$g'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow E(0,5)$, que es punto de corte con el eje Y.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 5$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5) - (x^2 - 2x + 1)]dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] = -\frac{16}{3} + 12 - \frac{2}{3} - 1 + 4 =$$

$$= -6 + 15 = \underline{9\ u^2 = S}.$$

****

5º) Con los dígitos 2 y 3, ¿cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar?

$N = VR_2^5 = 2^5 = 32.$

$\underline{Se\ pueden\ formar\ 32\ números.}$

Los números son los siguientes:

22222	22223	22232	22322	23222
32222	22233	22332	23322	33222
22323	23223	32223	23232	32232
32322	22333	23332	33322	23233
32233	32332	33232	33223	23323
32323	23333	33332	32333	33323
33233	33333			

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ 3x+ay+z=a-1 \\ 2x+ay=-2 \end{cases}$.

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso o casos de indeterminación.

c) ¿Existe algún valor de a tal que el sistema no tenga solución? Razona la respuesta.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & a & 1 & a-1 \\ 2 & a & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es:

$$Rang\ M=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=-3a+2+2a-a=0;\ \ 2-2a=0 \Rightarrow \boldsymbol{a=1}\ .$$

$$\underline{Para\ a\neq 1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $a=1$ es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-3F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=2F_3\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Resolvemos para $a=1$. El sistema resulta: $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ 3x+y+z=0 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (segunda) y haciendo $x=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} y-z=-4-\lambda \\ y=-2-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow -2-2\lambda-z=-4-\lambda \Rightarrow z=2-\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=\lambda, y=-2-2\lambda, z=2-\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

$c)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes y, como se ha comprobado en el apartado $a)$, esto no ocurre, por lo cual:

$$\underline{No\ existe\ ning\acute{u}n\ valor\ real\ de\ a\ para\ que\ el\ sistema\ sea\ incompatible.}$$

****

2º) Encontrar la recta r que tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 3)$ y pase por el punto P', siendo P' el punto simétrico del punto $P(0, -2, 0)$ respecto del siguiente plano: $\pi \equiv x + 3y + z = 5$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 3, 1)$.

La recta s, perpendicular a π, que pasa por el punto $P(0, -2, 0)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta s y el plano π tiene por componentes la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + z = 5 \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 3(-2 + 3\lambda) + \lambda = 5; \;\; \lambda - 6 + 9\lambda + \lambda = 5;$$

$11\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = 1 \;\Rightarrow \boldsymbol{Q(1, 1, 1)}$.

Para que el punto P' sea el simétrico del punto $P(0, -2, 0)$ con respecto al plano π es necesario que los vectores $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1, 1, 1) - (0, -2, 0)] = (1, 3, 1).$$

$$\overrightarrow{QP'} = [P' - Q] = [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = (x - 1, y - 1, z - 1).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow (1, 3, 1) = (x - 1, y - 1, z - 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \\ y - 1 = 3 \rightarrow y = 4 \\ z - 1 = 1 \rightarrow z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{P'(2, 4, 2)}$.

La recta pedida s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}}.$$

****

3º) Sea $f(x) = (3x - 2x^2) \cdot e^x$:

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Calcula los extremos relativos de f (máximos y mínimos).

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = (3 - 4x) \cdot e^x + (3x - 2x^2) \cdot e^x = (\boldsymbol{-2x^2 - x + 3}) \cdot \boldsymbol{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 - x + 3) \cdot e^x = 0, -2x^2 - x + 3 = 0;\ \ 2x^2 + x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1}.$$

Por ser $e^x > 0, \forall x \in R$, y teniendo en cuenta que el dominio de la función es l recta real, la función es creciente o decreciente según que la expresión $(-2x^2 - x + 3)$ sea positiva o negativa, respectivamente.

Los valores encontrados dividen al dominio de la función en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, que son $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 1\right)\ y\ (1, +\infty)$. Por ejemplo, para $x = 2 \in (1, +\infty)\ es\ f'(x) < 0$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0, x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0, x \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right).}$$

b)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f'(x) = (-2x^2 - x + 3) \cdot e^x.$$

$$f''(x) = (-4x - 1) \cdot e^x + (-2x^2 - x + 3) \cdot e^x = (\boldsymbol{-2x^2 - 5x + 2}) \cdot \boldsymbol{e^x}.$$

$$f''\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[-2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 2\right] \cdot e^{-\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{2} + \frac{15}{2} + 2\right) \cdot \frac{1}{e\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{Mínimo\ relativo\ para\ x = -\frac{3}{2}}.$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{e\sqrt{e}} = \left(-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{e}}{e^2} = -\frac{9\sqrt{e}}{e^2}.$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9\sqrt{e}}{e^2}\right).}$$

$$f''(1) = (-2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2) \cdot e^1 = -5e < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo\ para\ x = 1}.$

$$f(1) = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2) \cdot e^1 = e.$$

$$\underline{Máximo\ relativo: Q(1, e).}$$

****

4º) Calcular el valor de la siguiente integral definida: $I = \int_1^e x^2 \cdot Lx \cdot dx$.

En primer lugar se resuelve la integral indefinida $A = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx$.

$$A = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^2 \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \boldsymbol{\frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1)}.$$

$$I = \int_1^e x^2 \cdot Lx \cdot dx = \left[\frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1)\right]_1^e = \left[\frac{e^3}{9} \cdot (3Le - 1)\right] - \left[\frac{1^3}{9} \cdot (3L1 - 1)\right] =$$

$$= \frac{e^3}{9} \cdot (3 - 1) - \frac{1}{9} \cdot (3 \cdot 0 - 1) = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

$$\underline{I = \int_1^e x^2 \cdot Lx \cdot dx = \frac{2e^3+1}{9}}.$$

****

5º) Escribimos en orden creciente 250 múltiplos seguidos del 5, comenzando por el 50. Ahora suprimimos los 90 primeros. ¿Cuánto vale la suma de los restantes números?

La primera progresión que se forma es: $\underbrace{50, 55, 60, 65, \cdots\cdots, a_{250}}$.

La progresión anterior consta de 250 términos, siendo a_{250} el siguiente:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\Rightarrow\; a_{250} = 50 + 249 \cdot 5 = 50 + 1.245 = 1.295.$

La progresión que se suprime es: $\underbrace{50, 55, 60, 65, \cdots\cdots, a_{90}}$.

La progresión anterior consta de 90 términos, siendo a_{90} el siguiente:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\Rightarrow\; a_{90} = 50 + 89 \cdot 5 = 50 + 445 = 495.$

Dos formas de hacer el problema:

Primera: sumando los términos de las dos progresiones y restándolos.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \;\Rightarrow\; S_{250} = \frac{a_1 + a_{250}}{2} \cdot 250 = (50 + 1.295) \cdot 125 = 1.345 \cdot 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{S_{250} = 168.125}.$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \;\Rightarrow\; S_{90} = \frac{a_1 + a_{90}}{2} \cdot 90 = (50 + 495) \cdot 45 = 545 \cdot 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{S_{90} = 24.525}.$$

$S_{250} - S_{90} = 168.125 - 24.525 = 143.600.$

$$\underline{\textit{La suma de los restantes números es } 143.600}.$$

Segunda: sumando los términos de la progresión que se indica.

Téngase en cuenta que el primer sumando es el 91, puesto que el número 90 se resta.

La progresión resultante es: $\underbrace{a_{91}, a_{92}, a_{93}, a_{94}, \cdots\cdots, a_{250}}$.

El número de términos de la progresión es 250 – 90 = 160.

$$S_n = \frac{a_{91} + a_{250}}{2} \cdot (250 - 90) = \frac{500 + 1.295}{2} \cdot 160 = 1795 \cdot 80 = \boldsymbol{143.600}.$$

****