PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones, A y B. Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$, según los valores de a.

Procediendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ 0 & 3 & a+4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{a}F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{a} & 0 \\ 0 & 3 & a+4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 3F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+4a-12}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\frac{a^2+4a-12}{a} = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2$:

$$\frac{a^2+4a-12}{a} = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0;\ \ a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} =$$

$$= -2 \pm 4 \Rightarrow a_1 = -6, a_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = -6 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ \ para \begin{Bmatrix} a \neq -6 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

****

2º) Se dan los puntos $A(3,3,3), B(2,3,4), C(0,0,4)\ y\ D(3,0,1)$.

$a)$ ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

$b)$ Calcular a para que el punto $P(a,a,8)$ esté en la recta que pasa por A y C.

$a)$

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(3,3,3) - (2,3,4)] = (1,0,-1).$

$\overrightarrow{CA} = [A - C] = [(3,3,3) - (0,0,4)] = (3,3,-1).$

$\overrightarrow{DA} = [A - D] = [(3,3,3) - (3,0,1)] = (0,3,2).$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DA}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$$Rang\left\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}\right\} < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 + 3 = 0.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios}.$$

La ecuación general del plano π que determinan tiene como vectores directores a dos cualesquiera de los hallados y uno cualquiera de los puntos, por ejemplo:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ -3y + 3(z-4) + 3x + y = 0;$$

$-2y + 3z - 12 + 3x = 0.$

$$\underline{\pi \equiv 3x - 2y + 3z - 12 = 0}.$$

$b)$

La recta r que pasa por $A(3,3,3)\ y\ C(0,0,4)$ tiene por vector director al que determinan estos puntos: $\overrightarrow{CA} = (3,3,-1)$.

La recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}.$

Para que la recta r contenga al punto $P(a, a, 8)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$3\lambda = a \Rightarrow \lambda = \frac{a}{3}$. $\quad 4 - \lambda = 8 \Rightarrow 4 - \frac{a}{3} = 8;\ \frac{a}{3} = -4 \Rightarrow a = -12.$

$\underline{Para\ a = -12\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ A\ y\ C\ contiene\ al\ punto\ P}.$

****

3º) Sea f la función definida por: $f(x)=\begin{cases} 3-ax^2, & si\ x\leq 1 \\ \frac{2}{ax} & si\ \ x>1 \end{cases}$. Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, que para forzar su continuidad y derivabilidad se va a determinar el valor de a.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3-ax^2)=3-a=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{ax}=\frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow 3-a=\frac{2}{a} \Rightarrow 3a-a^2=2;\ a^2-3a+2=0.$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow a_1=1, a_2=2.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a=1\ y\ para\ a=2}.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} -2ax & si\ \ \ x\leq 1 \\ -\frac{2}{a^2} & si\ \ x>1 \end{cases}. \qquad f'(1^-)=-2a. \qquad f'(1^+)=-2.$$

$$f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow -2a=-2 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ para\ a=1}.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ \text{únicamente}\ para\ a=1}.$

****

4º) Calcular la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\cdot dx$.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 2A+B+C=2 \\ A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow B=1;$$

$-2+1+C=2;\;\; C=2+1=3.$

$$I=\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\cdot dx=\int\left[\frac{-1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}\right]\cdot dx=$$

$$=-L|x|+L|x+1|+3\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=L\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{3}{x+1}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\cdot dx=L\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{3}{x+1}+C.}$$

****

5º) De todos los números positivos x e y tales que $x + y = 10$, encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2 \cdot y$ sea máximo.

$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$

$P(x) = x^2 \cdot (10 - x) = -x^3 + 10x^2.$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; es necesario que la segunda derivada sea negativa para los valores que anulan la primera.

$P'(x) = -3x^2 + 20x.$

$P'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 20x = 0;\ -x(3x - 20) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{3}.$

$P''(x) = -6x + 20.$

$P''(0) = -6 \cdot 0 + 20 > 0 \Rightarrow Para\ mínimo.$

$P''\left(\frac{20}{3}\right) = -6 \cdot \frac{20}{3} + 20 = -40 + 20 = -20 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = \frac{20}{3}.$

$y = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}.$

$\underline{El\ producto\ P = x^2 \cdot y\ es\ máximo\ para\ x = \frac{20}{3}\ e\ y = \frac{10}{3}}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones $S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$:

a) Discutirlo según los distintos valores de a.

b) ¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - a - 2a + (a+1) + a^2 - 2(a+1) =$$

$$= a^2 + 2a + 1 - 3a - a - 1 + a^2 = 2a^2 - 2a = 0;\ a^2 - a = 0;\ \ a(a-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

$$\underline{Hay\ solución\ para\ a = 2: el\ sistema\ es\ compatible\ determinado.}$$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2} = \frac{18-8-4+3+8-24}{8-4} = \frac{21-28}{4} = -\frac{7}{4}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{12-1-4+4+2-6}{4} = \frac{14-7}{4} = \frac{7}{4}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3+4+8-6-8-2}{4} = \frac{15-16}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{7}{4}, y = \frac{7}{4}, z = -\frac{1}{4}.}$$

****

2º) Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y a la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

Un punto y un vector director de r son $Q(0,3,1)$ y $\overrightarrow{v_r}=(2,1,-1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{QP}=[P-Q]=(2,-4,1)$.

La ecuación del plano pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-2)-2(y+1)-8(z-2)-2(z-2)-4(x-2)-2(y+1)=0;$

$-3(x-2)-4(y+1)-10(z-2)=0;\ \ 3(x-2)+4(y+1)+10(z-2)=0;$

$3x-6+4y+4+10z-20=0.$

$$\underline{\pi \equiv 3x+4y+10z-22=0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de f.

b) Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.

c) ¿Tiene extremos la función f? En caso afirmativo, ¿en qué puntos?

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2, x = 2}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-4-x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow\ f'(x) > 0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (0, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para los valores que anula la primera derivada.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0;\ -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-4)^2+2x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-2)+8x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-2x^2+4+8x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{6x^2+4}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot(3x^2+2)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2\cdot(3\cdot 0^2+2)}{(0^2-4)^3} = \frac{-4}{-64} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

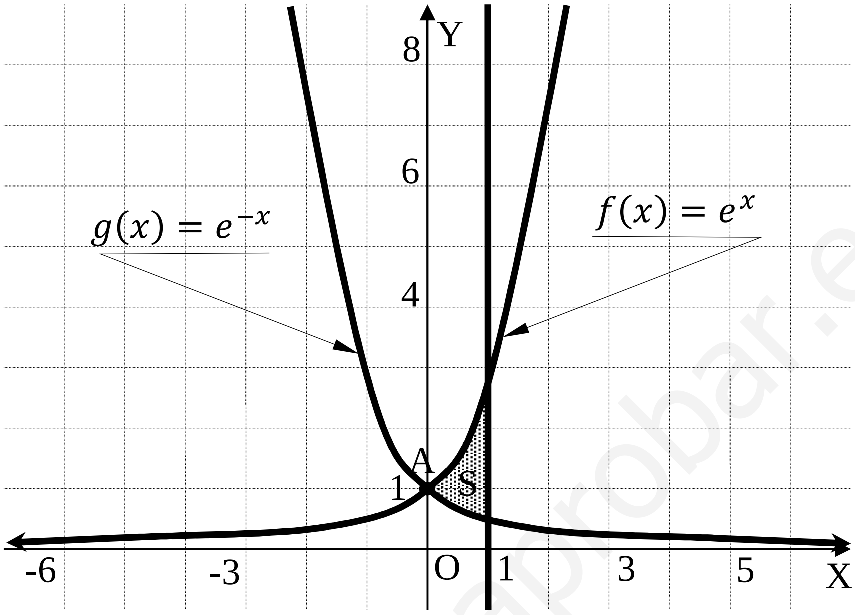
$$f(0) = \frac{0^2-3}{0^2-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0, \frac{3}{4}\right)}.$$

****

4º) Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^x, y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

$a)$

La funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas y se cortan en el punto $A(0, 1)$.



La función $f(x) = e^x$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in R$.

Por ser $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, el semieje –X es asíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) \cdot dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = (e^1 + e^{-1}) - (e^0 + e^{-0}) =$$

$$= e + \frac{1}{e} - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^2 + 1 - 2e}{e}.$$

$Nota$: $\int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} -x = d \\ dx = -dt \end{Bmatrix} \Rightarrow -\int e^t \cdot dt = -e^t = -e^{-x}$.

$$\underline{S = \frac{e^2 + 1 - 2e}{e}\ u^2 \cong 2{,}086\ u^2.}$$

****

5º) Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1.001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1.001, ¿cuánto vale $P - T$?

Los números pares menores que 1.001 forman las siguiente progresión aritmética: $\div\ 2, 4, 6, \cdots\cdots, 1.000$, que tiene las siguientes características:

$a_1 = 2;\ \ d = 2;\ \ a_n = 1.000.$

La fórmula del término general de una ÷ es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1.000-2}{2} + 1 = \frac{998}{2} + 1 = 499 + 1 = 500.$

La suma de los términos de una ÷ es $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$P = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2+1.000}{2} \cdot 500 = \frac{1.002}{2} \cdot 500 = 501 \cdot 500 = 250.500.$

Los números múltiplos de tres menores que 1.001 forman las siguiente progresión aritmética: $\div\ 3, 6, 9, \cdots\cdots, 999$, que tiene las siguientes características:

$a_1 = 3;\ \ d = 3;\ \ a_n = 999.$

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{999-3}{3} + 1 = \frac{996}{3} + 1 = 332 + 1 = 333.$

$T = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3+999}{2} \cdot 333 = \frac{1.002}{2} \cdot 333 = 501 \cdot 333 = 166.833.$

$$\underline{P - T = 250.500 - 166.833 = 83.667}.$$

****