

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO – 2018**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio venta (euros)
S1	4	7	2	0	0	0,8
S2	4	5	3	2	3	0,6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

i) Plantee el problema. *ii)* Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso.

i)

Sean x e y las raciones de piensos de los tipos P1 y P2 que el estudiante suministra diariamente a su mascota, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 4y \geq 12 \\ 4x + 4y \leq 40 \\ 3y \geq 6 \\ 2y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 17 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y \geq 3 \\ x + y \leq 10 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 17 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}.$$

ii)

La función de objetivos es: $f(x, y) = 7x + 5y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

① $\Rightarrow x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow \text{No.}$

x	0	3
y	3	0

② $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow \text{Si.}$

x	10	5
y	0	5

③ $\Rightarrow 2x + 3y \leq 17 \Rightarrow y \leq \frac{17-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow \text{Si.}$

x	1	7
y	5	1

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

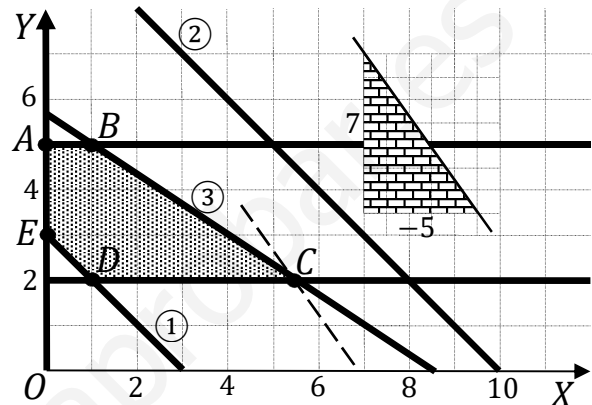
$A \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,5).$

$B \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + 15 = 17;$

$2x = 2; x = 1 \Rightarrow B(1,5).$

$C \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases} \Rightarrow 2x + 6 = 17; 2x = 11; x = 5,5 \Rightarrow C(5,5; 2).$

$D \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(1,2). \quad E \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow E(0,3)$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,5) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 0 + 25 = 25.$

$B \Rightarrow f(1,5) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 7 + 25 = 32.$

$C \Rightarrow f(5,5; 2) = 7 \cdot 5,5 + 5 \cdot 2 = 38,5 + 10 = 48,5.$

$D \Rightarrow f(1,2) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 7 + 10 = 17.$

$E \Rightarrow f(0,3) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 0 + 15 = 15.$

El máximo se produce en el punto $C(5,5; 2)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

Las proteínas son máximas con 5,5 raciones de P1 y 2 raciones de P2.

iii)

La nueva función de objetivos es: $g(x, y) = 0,8x + 0,6y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 5) = 0,8 \cdot 0 + 0,6 \cdot 5 = 0 + 3 = 3.$$

$$B \Rightarrow f(1, 5) = 0,8 \cdot 1 + 0,6 \cdot 5 = 0,8 + 3 = 3,8.$$

$$C \Rightarrow f(5,5; 2) = 0,8 \cdot 5,5 + 0,6 \cdot 2 = 4,4 + 1,2 = 5,6.$$

$$D \Rightarrow f(1, 2) = 0,8 \cdot 1 + 0,6 \cdot 2 = 0,8 + 1,2 = 2.$$

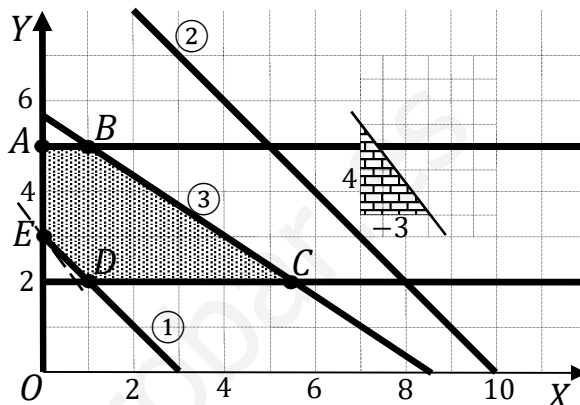
$$E \Rightarrow f(0, 3) = 0,8 \cdot 0 + 0,6 \cdot 3 = 0 + 1,8 = 1,8.$$

El mínimo se produce en el punto $E(0, 3)$.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 0,8x + 0,6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,8}{0,6}x = -\frac{8}{6}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

El mínimo coste (1,8 euros) se produce con solamente 3 raciones de P2.



2º) Calcule:

$$i) I = \int_{-1}^0 \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx.$$

$$ii) I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx.$$

iii) Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1) = 2$.

i)

$$I = \int_{-1}^0 \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \int \left(\frac{2x^2+2}{x^2+1} + \frac{5x}{x^2+1} \right) \cdot dx = 2 \cdot \int dx + \int \frac{5x}{x^2+1} \cdot dx = 2x + B. \quad (*)$$

$$B = \int \frac{5x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \\ 5x dx = \frac{5}{2} dt \end{array} \right\} = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{5}{2} \cdot Lt = \frac{5}{2} \cdot L(x^2 + 1).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B: $A = 2x + \frac{5}{2} \cdot L(x^2 + 1)$.

$$I = \int_{-1}^0 \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \left[2x + \frac{5}{2} \cdot L(x^2 + 1) \right]_{-1}^0 = \left[0 + \frac{5}{2} \cdot L(0 + 1) \right] - \left\{ 2 \cdot (-1) + \frac{5}{2} \cdot L[(-1)^2 + 1] \right\} = 0 - \left(-2 + \frac{5}{2} \cdot L2 \right) = 2 - \frac{5}{2} \cdot L2 = \frac{4-5L2}{2} = \frac{4-L2^5}{2} = \frac{4-L32}{2}.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^0 \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \frac{4-L32}{2}.$$

ii)

$$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{\sqrt{x}} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \int dt = \sqrt{2} \cdot t + C = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \int e^t dt =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^t + C = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.$$

iii)

Una primitiva de la función $f(x) = \frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1) = 2$.

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{3x}{(2-x^2)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ 3x dx = -\frac{3}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{-\frac{3}{2}}{t^2} \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \int t^{-2} \cdot dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2 \cdot (2-x^2)} + C.$$

$$F(-1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2 \cdot [2-(-1)^2]} + C = 2; \frac{3}{2 \cdot (2-1)} + C = 2; \frac{3}{2} + C = 2; 3 + 2C = 4;$$

$$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{F(x) = \frac{3}{2 \cdot (2-x^2)} + \frac{1}{2}.}$$

3º) Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente (0,7485; 0,8515).

i) Calcule el nivel de confianza del intervalo.

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93 %.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

a)

$$p = \frac{320}{400} = 0,8. \quad E = \frac{0,8515 - 0,7485}{2} = \frac{0,103}{2} = 0,0515.$$

$$\text{Datos: } n = 400; \quad p = 0,8; \quad q = 0,2; \quad E = 0,0515.$$

$$\text{Sabido que } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} = 0,0515 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,8 \cdot 0,2}} =$$

$$= 0,0515 \cdot 50 = 2,275.$$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0, 1)$ a 2,275 le corresponde el valor de 0,9885, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9885; \quad \alpha = 2 - 1,9770 = 0,1230 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,8770.$$

El nivel de confianza utilizado es del 87,70 %.

a)

Para un nivel de confianza del 93 %;

$$\alpha = 1 - 0,93 = 0,07 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,035} = 1,81.$$

$$(1 - 0,035 = 0,9650 \rightarrow z = 1,81).$$

$$\text{Datos: } n = 400; \quad p = 0,8; \quad q = 0,2; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,81.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n , es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$.

$$\left(0,8 - 1,81 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}}; 0,8 + 1,81 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}} \right);$$

$(0,8 - 1,81 \cdot 0,02; 0,8 + 1,81 \cdot 0,02); (0,8 - 0,0362; 0,8 + 0,0362).$

$I.C._{93\%} = (0,7638; 0,8362).$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas:

i) Calcule $A \cdot A^t - B \cdot B^t$.

ii) Calcule $(C^{-1})^2$.

iii) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta.

i)

$$\begin{aligned} A \cdot A^t - B \cdot B^t &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

ii)

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj. de } C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj. de } C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(C^{-1})^2 = C^{-1} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}}}.$$

iii)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \neq 0.$$

La matriz $A \cdot A^t$ es invertible.

2º) Dada la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$, calcule:

i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iii) Asíntotas de la función.

iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$.

i)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (1-x) - (5-x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1+x+5-x}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}.$$

$$m = f'(-1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$f(-1) = \frac{5-(-1)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow P(-1, 3).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 3 = 1 \cdot (x + 1) = x + 1.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{\underline{Tangente: t \equiv x - y + 4 = 0.}}$$

ii)

Por tratarse de una función racional su dominio es \mathbb{R} , excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D(f).$$

La función es monótona creciente en su dominio.

Como consecuencia de lo anterior:

La función $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos relativos.

iii)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-x}{1-x} = 1 \Rightarrow \underline{\text{Asíntota horizontal: } y = 1.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

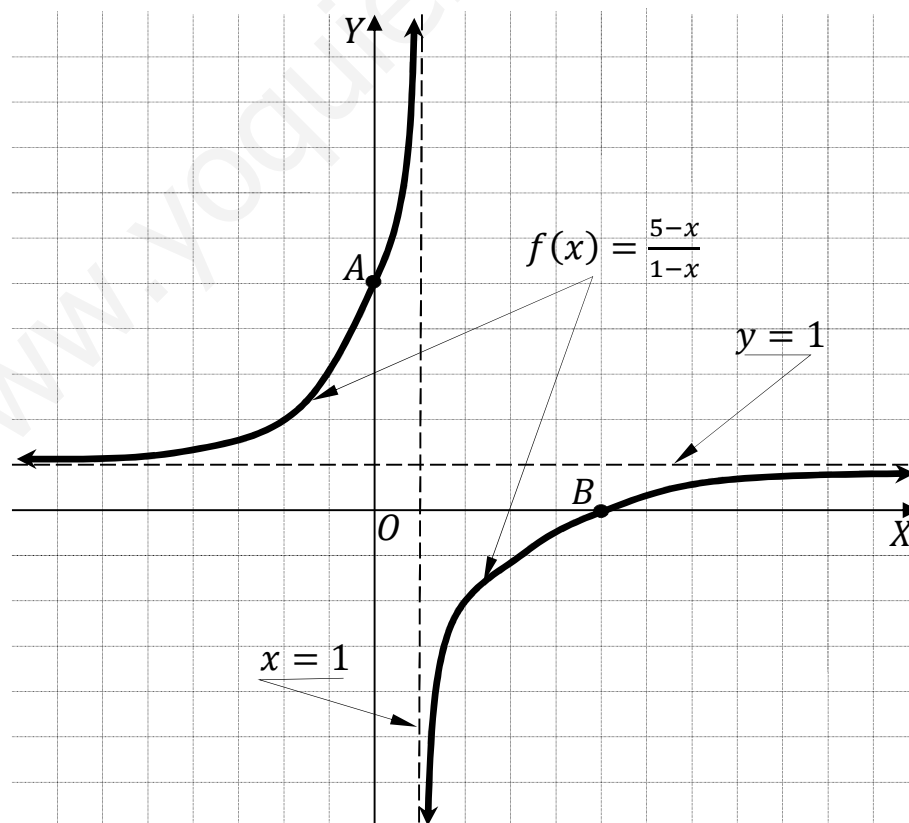
La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

iv)

Los puntos de corte con los ejes son $A(5, 1)$ y $B(5, 0)$.

De los cortes con los ejes y de los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la función que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.

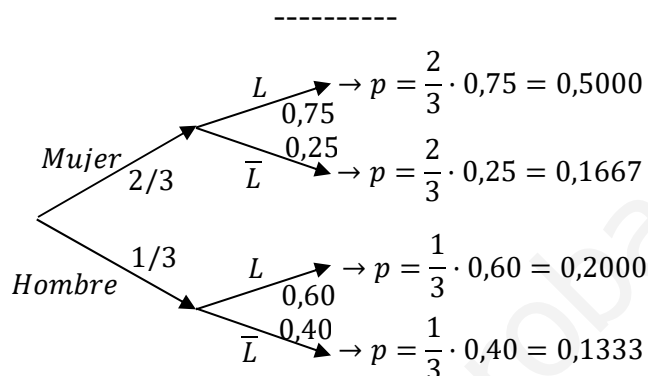


3º) En un aula de bachillerato, el 75 % de las chicas y el 60 % de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicho aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

i) La probabilidad de que sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que sea chico y so sea lector habitual.

iii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual.



i)

$$P = P(L) = P(M \cap L) + P(H \cap L) = P(M) \cdot P(L/M) + P(H) \cdot P(L/H) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,60 = 0,50 + 0,20 = \underline{0,70}.$$

ii)

$$P = P(H \cap \bar{L}) = P(H) \cdot P(\bar{L}/H) = \frac{1}{3} \cdot 0,40 = \underline{0,1333}.$$

iii)

$$P = P(\bar{L}/M) = \frac{P(M \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(M) \cdot P(\bar{L}/M)}{1 - P(L)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,25}{1 - 0,70} = \frac{0,1667}{0,30} = \underline{0,5556}.$$
