PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Sea la expresión matricial $B^t - AX = B$, siendo A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Despeje la matriz X. ii) Calcule la matriz X.

----

i)

$$B^t - AX = B;\ \ B^t - B = AX;\ \ A^{-1} \cdot (B^t - B) = A^{-1} \cdot A \cdot X;$$

$A^{-1} \cdot (B^t - B) = I \cdot X \ \Rightarrow\ \underline{X = A^{-1} \cdot (B^t - B)}$.

ii)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to -F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^t - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1.000 euros en publicidad?

ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio?

iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto de publicidad.

iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

----

i)

$$f(0) = -3 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 20 = 20.$$

$$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ empresa\ sin\ publicidad\ es\ de\ 20.000\ euros}.$$

$$f(1) = -3 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 + 20 = -3 + 30 + 20 = 47.$$

$$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ empresa\ con\ 1.000\ euros\ de\ publicidad\ es\ de\ 47.000\ euros}.$$

ii)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = -6x + 30.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 30 = 0;\ -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$$

$$f''(x) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 5.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ se\ invierten\ en\ publicidad\ 5.000\ euros}.$$

$$f(5) = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 20 = -75 + 150 + 20 = 95.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 95.000\ euros}.$$

iii)

Un función es creciente o decreciente cuando se anula su primera derivada.

Como quiera que la función es una parábola cóncava ($\cap$) es creciente hasta el vértice y después es decreciente.

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow [0,8]$ y que $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$.

$$\underline{El\ beneficio\ aumenta\ cuando\ aumenta\ la\ publicidad\ hasta\ 5.000\ euros.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ disminuye\ cuando\ la\ publicidad\ es\ mayor\ de\ 5.000\ euros.}$$

$iv)$

Como la función es una parábola cóncava, el mínimo lo tiene en uno o los dos extremos de su dominio:

$f(0) = 20.$

$f(8) = -3 \cdot 8^2 + 30 \cdot 8 + 20 = -192 + 240 + 20 = 68.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ minimo\ en\ ausencia\ de\ publicidad.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ minimo\ es\ de\ 20.000\ euros.}$$

****

3º) Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán.

ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán.

iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán.
(Escriba las fórmulas necesarias)

$A \to Grupo\ A;\ \ B \to Grupo\ B;\ \ a \to Habla\ alemán;\ \ \overline{a} \to No\ habla\ alemán.$

i)

$$P = P(A\overline{a}, A\overline{a}, B\overline{a}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{20}{25} = \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{29}{13} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{29}{65} = 0{,}4462}.$$

ii)

$$P = P(Aa, A\overline{a}, B\overline{a}) + P(A\overline{a}, Aa, B\overline{a}) + P(A\overline{a}, A\overline{a}, Ba) =$$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{5}{25} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{2}{13} + \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{29}{13} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{13} + \frac{29}{13 \cdot 20} = \frac{80+29}{13 \cdot 20} = \frac{109}{13 \cdot 20} = \underline{\frac{109}{260} = 0{,}4192}.$$

iii)

La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán es el suceso contrario de que ninguno hable alemán, por lo cual, del apartado a):

$$P = 1 - P\left(A\overline{A}, A\overline{A}, B\overline{A}\right) = 1 - \frac{29}{65} = 1 - 0{,}4462 = \underline{0{,}5538}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3.000 euros y 1.500 euros, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada tipo de cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas de maquinaria y de 2.400 kilos de abono.

i) Plantee el problema $\qquad\qquad$ ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1.

----

i)

Sean x e y el número de hectáreas los tipos C1 y C2 que cultiva el agricultor, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\geq 4 \\ 20x+10y\leq 180 \\ 100x+300y\leq 2.400 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\geq 4 \\ 2x+y\leq 18 \\ x+3y\leq 24 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

ii)

$① \Rightarrow x+y\geq 4 \Rightarrow y\geq 4-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	4	0
y	0	4

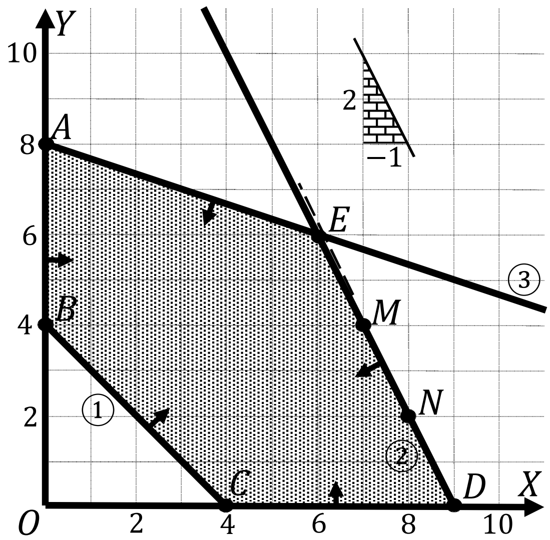
$② \Rightarrow 2x+y\leq 18 \Rightarrow y\leq 18-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	9	5
y	0	8

$③ \Rightarrow x+3y\leq 24 \Rightarrow y\leq \frac{24-x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	9
y	8	5

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,8).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,4).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(4,0).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=18 \end{array}\right\} \Rightarrow D(9,0).$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 18 \\ x + 3y = 24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6x + 3y = 54 \\ -x - 3y = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 30;\ x = 6 \Rightarrow E(6,6).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 3.000x + 1500y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,8) = 3.000 \cdot 0 + 1.500 \cdot 8 = 0 + 12.000 = 12.000.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 3.000 \cdot 0 + 1.500 \cdot 4 = 0 + 6.000 = 6.000.$

$C \Rightarrow f(4,0) = 3.000 \cdot 4 + 1.500 \cdot 0 = 12.000 + 0 = 12.000.$

$D \Rightarrow f(9,0) = 3.000 \cdot 9 + 1.500 \cdot 0 = 27.000 = 27.000.$

$E \Rightarrow f(6,6) = 3.000 \cdot 6 + 1.500 \cdot 6 = 18.000 + 9.000 = 27.000.$

El máximo se produce en los puntos $D(9,0)\ y\ E(6,6)$, es decir, en todos los puntos de la recta que determinan.

Los valores enteros que cumplen la condición son, además de los anteriores, los puntos $M(7,4)\ y\ N(8,2)$.

También se hubiera obtenido el mismo resultado por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 3.000x + 1.500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3.000}{1.500}x = -\frac{2}{1}x \Rightarrow m = -\frac{2}{1}.$$

$\underline{El\ agricultor\ obtiene\ el\ máximo\ rendimiento\ cultivando:}$

$\underline{9\ hectáreas\ de\ C1\ y\ 0\ hectáreas\ de\ C2}\ o$

$\underline{6\ hectáreas\ de\ C1\ y\ 6\ hectáreas\ de\ C2}\ o$

$\underline{7\ hectáreas\ de\ C1\ y\ 4\ hectáreas\ de\ C2}\ o$

$\underline{8\ hectáreas\ de\ C1\ y\ 2\ hectáreas\ de\ C2.}$

$\underline{En\ todos\ los\ casos\ obtiene\ un\ beneficio\ de\ 27.000\ euros.}$

$iii)$

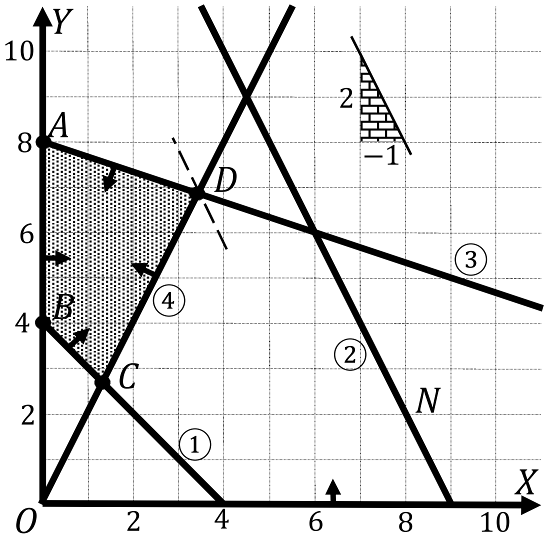
Si se añade la condición $y \geq 2x$, la situación gráfica se expresa en la figura siguiente.

④ $\Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow P(2,0) \rightarrow No.$

x	0	4
y	0	8

La nueva zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la nueva zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x + 3y = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(0,8).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(0,4).$

$E \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 2x = 4;\;\; 3x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3};\;\; y = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right).$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 3y = 24 \\ y = 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 6x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{7};\; y = 2 \cdot \frac{24}{7} = \frac{48}{7} \Rightarrow D\left(\frac{24}{7}, \frac{48}{7}\right).$

La función de objetivos es la misma: $f(x,y) = 3.000x + 1500y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los nuevos vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,8) = 3.000 \cdot 0 + 1.500 \cdot 8 = 0 + 12.000 = 12.000.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 3.000 \cdot 0 + 1.500 \cdot 4 = 0 + 6.000 = 6.000.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = 3.000 \cdot \frac{4}{3} + 1.500 \cdot \frac{8}{3} = 4.000 + 4.000 = 8.000.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{24}{7}, \frac{48}{7}\right) = 3.000 \cdot \frac{24}{7} + 1.500 \cdot \frac{48}{7} \cong 10.286 + 10.286 = 20.572.$

El máximo se produce en el punto $D\left(\frac{24}{7}, \frac{48}{7}\right).$

También se hubiera obtenido el mismo punto por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$\underline{Máximo\ rendimiento\ cultivando\ \frac{24}{7}\ ha\ de\ C1\ y\ \frac{48}{7}\ de\ C2.}$

****

2º) i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + x \cdot L(1-2x)$.

ii) Calcule $I = \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{4x^2+1}}$. iii) Calcule $I = \int_0^1 2xe^{3x^2} \cdot dx$.

----

i)

Conviene recordar que $cos^3(5x^2) = [\cos(5x^2)]^3$.

$$f'(x) = 3 \cdot cos^2(5x^2) \cdot [-sen\,(5x^2) \cdot (10x)] + 1 \cdot L(1-2x) + x \cdot \frac{-2}{1-2x} =$$

$$= -30x \cdot cos^2(5x^2) \cdot sen\,(5x^2) + L(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.$$

$$\underline{f'(x) = -30x \cdot cos^2(5x^2) \cdot sen\,(5x^2) + L(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.}$$

ii)

$$I = \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{4x^2+1}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x^2+1 = t \\ 8x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{8} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{t} + C = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^2+1} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^2+1} + C.}$$

iii)

$$I = \int_0^1 2xe^{3x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 3x^2 = t & x = 1 \rightarrow t = 3 \\ 6x \cdot dx = dt & x = 0 \rightarrow t = 0 \\ 2x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt & \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\frac{1}{3} \cdot \int e^t \cdot dt\right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot e^t\right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot e^3 - \frac{1}{3} \cdot e^0 = \frac{1}{3} \cdot e^3 - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot e^3 - \frac{1}{3}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 2xe^{3x^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot (e^3 - 1).}$$

****

3º) En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96 %.

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92 %.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

i)

Para un nivel de confianza del 96 %;

$\alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$
$(1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \ \rightarrow z = 2{,}055).$

Datos: $n = 500$; $p = \frac{350}{500} = 0{,}7$; $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}7 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{500}};\ 0{,}7 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{500}}\right);$$

$(0{,}7 - 2{,}055 \cdot 0{,}0205;\ 0{,}7 + 2{,}055 \cdot 0{,}0205);\ \ (0{,}7 - 0{,}0421;\ 0{,}7 + 0{,}0421).$

$$\underline{I.C._{96\,\%} = (0{,}6579;\ 0{,}7421).}$$

ii)

Para un nivel de confianza del 92 %;

$\alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$
$(1 - 0{,}04 = 0{,}9600 \ \rightarrow z = 1{,}75).$

Datos: $n = 500$; $p = \frac{150}{500} = 0{,}3$; $q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75.$

$$\left(0{,}3 - 1{,}75 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{500}};\ 0{,}3 + 1{,}75 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{500}}\right);$$

$(0{,}3 - 1{,}75 \cdot 0{,}0205;\ 0{,}3 + 1{,}75 \cdot 0{,}0205);\ \ (0{,}3 - 0{,}0359;\ 0{,}3 + 0{,}0359).$

$$\underline{I.C._{92\,\%} = (0{,}2641;\ 0{,}3359)}.$$

****