PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

1º) Un cajero automático contiene billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 euros. El número de billetes de 10 euros es igual que el número de billetes de 20 euros y 50 euros juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resuelva el sistema por el método de Gauss.

----

a)

Sean x, y, z el número de billetes de 10, 20 y 50 euros que contiene el cajero automático, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=21.000 \\ x=y+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2.100 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$$

b)

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & -2 & -2 & -800 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & 0 & 6 & 1.800 \end{pmatrix} \Rightarrow 6z = 1.800;\ \ z = 300.$$

$$y + 4 \cdot 300 = 1.300; \;\; y + 1.200 = 1.300; \;\; y = 100.$$

$$x + 100 + 300 = 800; \;\; x + 400 = 800; \;\; x = 400.$$

$\underline{El\ cajero\ tiene\ 400\ billetes\ de\ 10\ euros, 100\ de\ 50\ euros\ y\ 300\ de\ 50\ euros.}$

****

2º) Se están considerando dos alimentos, A y B, que contiene tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea, además, no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se deseara maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

----

a)

Sean x e y el número de kilogramos que se adquieren de los alimentos A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 0{,}1x+0{,}2y\le 10 \\ 0{,}6x+0{,}3y\ge 18 \\ 0{,}3x+0{,}5y\ge 15 \\ 0\le x\le 75;\ y\ge 0 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 100 \\ 2x+y\ge 60 \\ 3x+5y\ge 150 \\ 0\le x\le 75;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

b)

① $\Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\le \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	100
y	50	0

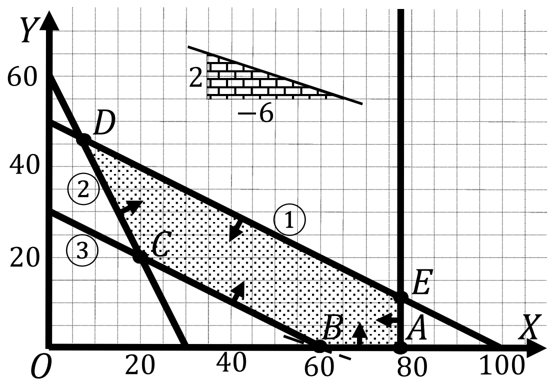
② $\Rightarrow 2x+y\ge 60 \Rightarrow y\ge 60-2x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	30
y	60	0

③ $\Rightarrow 3x+5y\ge 150 \Rightarrow y\ge \frac{150-3x}{5} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	50
y	30	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=75 \end{array}\right\}\Rightarrow A(75,0).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+5y=150 \end{array}\right\}\Rightarrow B(50,0).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=60 \\ 3x+5y=150 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 10x+5y=300 \\ -3x-5y=-150 \end{array}\right\}\Rightarrow 7x=150;\ x=\frac{150}{7};$

$\frac{300}{7}+y=60;\ \ 300+7y=420;\ \ 7y=120;\ \ y=\frac{120}{7}\Rightarrow C\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ 2x+y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+4y=200 \\ -2x-y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=140;\ \ y=\frac{140}{3};$$

$$x+\frac{280}{3}=100;\ 3x+280=300;\ \ 3x=20;\ \ x=\frac{20}{3} \Rightarrow D\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=75 \\ x+2y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow 75+2y=100;\ \ 2y=25;\ \ y=\frac{25}{2} \Rightarrow E\left(75,\frac{25}{2}\right).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=10x+30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(75,0)=10\cdot 75+30\cdot 0=750+0=750.$$

$$B \Rightarrow f(50,0)=10\cdot 50+30\cdot 0=500+0=500.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=10\cdot\frac{150}{7}+30\cdot\frac{120}{7}=\frac{1.500+3.600}{7}=\frac{5.100}{7}\cong 728{,}57.$$

$$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=10\cdot\frac{20}{3}+30\cdot\frac{140}{3}=\frac{200+4.200}{3}=\frac{4.400}{3}\cong 1.466{,}67.$$

$$E \Rightarrow f\left(75,\frac{25}{2}\right)=10\cdot 75+30\cdot\frac{25}{2}=750+375=1.125.$$

El mínimo se produce en el punto $B(50,0)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=10x+30y=0 \Rightarrow y=-\frac{10}{30}x=-\frac{1}{3} \Rightarrow m=-\frac{2}{6}.$$

$$\underline{\mathit{Mínimo\ coste\ comprando}\ 50\ kg\ \mathit{del\ alimento}\ A.}$$

$$\underline{\mathit{El\ coste\ mínimo\ es\ de}\ 500\ \mathit{euros}}.$$

$c)$

La nueva función de objetivos es $g(x,y)=1{,}5x+2y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(75,0)=1{,}5\cdot 75+2\cdot 0=112{,}5+0=112{,}5.$$

$$B \Rightarrow f(50,0)=1{,}5\cdot 50+2\cdot 0=75+0=75.$$

$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) = 1{,}5 \cdot \frac{150}{7} + 2 \cdot \frac{120}{7} = \frac{225+240}{7} = \frac{465}{7} \cong 66{,}43.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right) = 1{,}5 \cdot \frac{20}{3} + 2 \cdot \frac{140}{3} = \frac{30+280}{3} = \frac{310}{3} \cong 103{,}33.$

$E \Rightarrow f\left(75, \frac{25}{2}\right) = 1{,}5 \cdot 75 + 2 \cdot \frac{25}{2} = 112{,}5 + 25 = 137{,}5.$

El máximo se consigue en el punto $E\left(75, \frac{25}{2}\right) \approx E(75; 12{,}5).$

$$\underline{Se\ maximiza\ la\ vitamina\ comprando\ 50\ kg\ de\ A\ y\ 12{,}5\ kg\ de\ B.}$$

****

3º) Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

a) Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

----

a)

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función $g(x) = 2x^2 - x^3$ son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^3 = 0;\ \ x^2(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2 = 2 \to \underline{A(2,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$g'(x) = 4x - 3x^2. \qquad\qquad g''(x) = 4 - 6x.$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 6x = 0;\ \ 2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de $g(x)$ es R, por ser polinómica, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)}.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)}.$$

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores reales de la variable que hacen cero la segunda derivada, siendo distinta la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$g'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = \frac{2}{3}.$$

$$g\left(\tfrac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} - \frac{8}{27} = \frac{24-8}{27} = \frac{16}{27} \Rightarrow \underline{P.I. \to B\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right)}.$$

b)

$$h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9. \qquad\qquad h''(x) = 6x - 6.$$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$

$= \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$

$h''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$h''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$

$h(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 10 = -27 + 10 = -17 \Rightarrow \underline{Mín. \rightarrow P(3, -17)}.$

****

4º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

b) Represente gráficamente la función $f(x)$.

c) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

----

a)

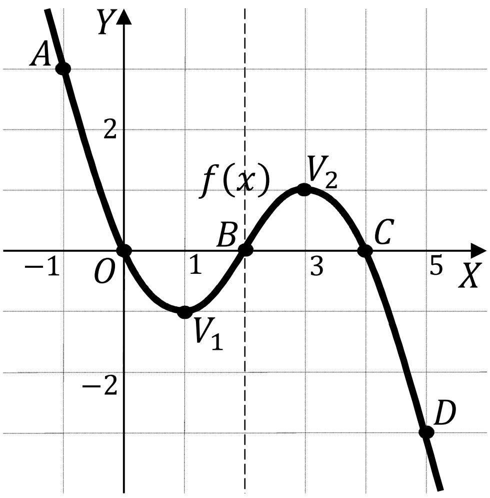
La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 2$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 4 - 4 = 0 = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 6x - 8) = -4 + 12 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R}.$$

b)



En el intervalo $(-\infty, 2]$ la función es la parábola $g(x) = x^2 - 2x$, que es convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

$g(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_1(1, -1).$

Otros puntos de la parábola son los siguientes: $O(0, 0), A(-1, 0)\ y\ B(2, 0)$.

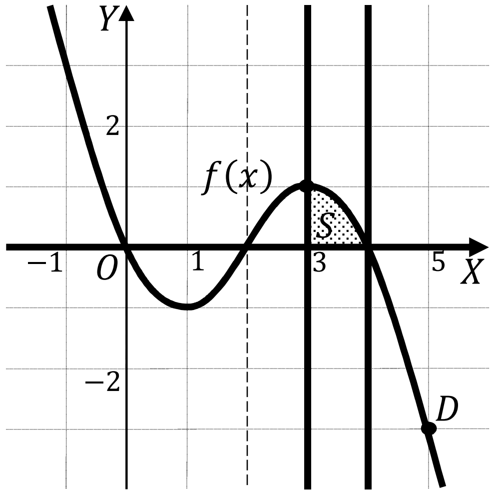
En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es la parábola $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$h'(x) = -2x + 6 = 0;\ -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

$h(3) = -9 + 18 - 8 = 18 - 17 = 1 \Rightarrow V_2(3, 1).$

La representación gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$ es, aproximadamente, la que aparece en la figura anterior.

$c)$



En el intervalo $[3, 4]$ la expresión de la función es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

De la observación de la figura adjunta se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_3^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{6\cdot4^2}{2} - 8\cdot4\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{6\cdot3^2}{2} - 8\cdot3\right) = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + 9 - 27 + 24 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 81 - 59 = 22 - \frac{64}{3} = \frac{66-64}{3} \Rightarrow \underline{S = \frac{2}{3}\, u^2 \cong 0{,}67\, u^2}.$$

****

5º) En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos. Calcule:

a) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

b) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

c) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

El número de candidatos estudiantes es: $n_1 = 0{,}6 \cdot 25 = 15$.

El número de candidatos jubilados es: $n_2 = 0{,}32 \cdot 25 = 8$.

El número de candidatos trabajadores es: $n_3 = 25 - n_1 - n_2 = 25 - 23 = 2$.

a)

$$P = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{23} = \underline{\frac{14}{575} = 0{,}0243}.$$

b)

$$P = P(EET) + P(ETE) + P(TEE) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} + \frac{15}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{14}{23} + \frac{2}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} =$$

$$= 3 \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{23} = \underline{\frac{21}{230} = 0{,}0913}.$$

c)

La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno de ellos sea trabajador:

$$P = 1 - \frac{23}{25} \cdot \frac{22}{24} \cdot \frac{21}{23} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{21}{1} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{1} = 1 - \frac{77}{100} = \frac{100-77}{100} =$$

$$= \underline{\frac{23}{100} = 0{,}23}.$$

****

6º) Un estudia concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9{,}58875; 10{,}41125]$.

a) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de 144 exfumadores.

b) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

a)

$$\overline{x} = \frac{10{,}41125 + 9{,}58875}{2} = \frac{20{,}0000}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 10}.$$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$
$$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$$

$$E = \frac{10{,}41125 - 9{,}58875}{2} = \frac{0{,}82250}{2} = 0{,}41125.$$

Datos: $n = 144;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\ \ E = 0{,}41125.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{0{,}41125 \cdot \sqrt{144}}{1{,}645} = \frac{0{,}41125 \cdot 12}{1{,}645} = \frac{1{,}82371}{1{,}645} \Rightarrow \underline{\sigma = 3}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}94 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}94 = 0{,}06 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}03} = 1{,}88.$$
$$(1 - 0{,}03 = 0{,}9700 \ \rightarrow z = 1{,}88).$$

Datos: $n = 144;\ \ \overline{x} = 10;\ \ \sigma = 3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(10 - 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}};\ 10 + 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}}\right);\ \ (10 - 1{,}88 \cdot 0{,}25;\ 10 + 1{,}88 \cdot 0{,}25);$$

$$(10 - 0{,}47;\ 10 + 0{,}47) \ \Rightarrow \ \underline{I.C._{94\,\%} = (9{,}53;\ 10{,}47)}.$$

****