PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule A^{-1} y B^{-1}.

b) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$.

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \; Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$C - A = 2X - 6I; \; 2X = C - A + 6I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= 2X = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$A \cdot X \cdot B = C; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1};$$

$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}.$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.

----

a, b)

Sean x e y el número de horas dedicadas a los cursos F1 y F2, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y \leq 50 \\ x \geq 20;\;\; y \leq 35 \\ x \geq y \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y \leq 50 \Rightarrow y \leq 50-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

② $\Rightarrow x \geq y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(20,0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	0	50

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

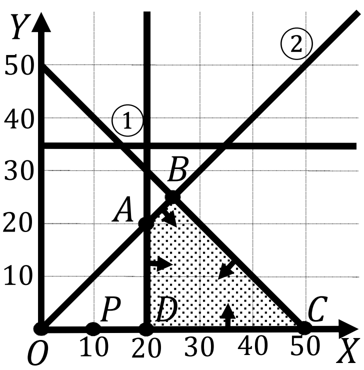
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=x \\ x=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=50;\;\; x=25 \Rightarrow B(25,25).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=50 \Rightarrow C(50,0).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=20 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(20,0).$



La función de objetivos es $f(x,y) = 1{,}01x + 1{,}02y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, 20) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 20 = 20{,}2 + 20{,}4 = 40{,}6.$

$B \Rightarrow f(25, 25) = 1{,}01 \cdot 25 + 1.02 \cdot 25 = 25{,}25 + 25{,}5 = 50{,}75.$

$C \Rightarrow f(50, 0) = 1{,}01 \cdot 50 + 1.02 \cdot 0 = 50{,}5 + 0 = 50{,}5.$

$D \Rightarrow f(20, 0) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 0 = 20{,}2 + 0 = 20{,}2.$

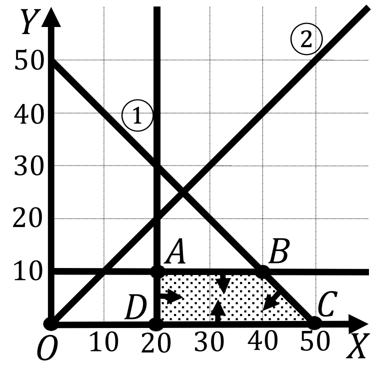
El valor máximo se produce en el punto $B(25, 25)$.

$\underline{La\ productividad\ es\ máxmia\ dedicando\ 25\ horas\ a\ cada\ curso.}$

$c)$

Los vértices $D\ y\ C$ siguen siendo los mismos, es decir: $C(50, 0)$ y $D(20, 0)$.

Los nuevos vértices $A\ y\ B$ son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20, 10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 10 = 50;\ \ x = 40 \Rightarrow B(40, 10).$

Los valores de la función de objetivos en los nuevos vértices $A\ y\ B$ son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, 10) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 10 = 20{,}2 + 10{,}2 = 30{,}4.$

$B \Rightarrow f(40, 10) = 1{,}01 \cdot 40 + 1.02 \cdot 10 = 40{,}4 + 10{,}2 = 50{,}6.$

$\underline{La\ productividad\ es\ máxmia\ dedicando\ 40\ horas\ a\ F1\ y\ 10\ horas\ a\ F2.}$

****

3º) Sean las funciones $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x) = 2x^2 + ax + 1$.

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

b) Calcule el valor de a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = 1/2$.

c) Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro real $a = -1$.

----

a)

$$f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x-2} = \frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}.$$

La función $f(x)$, por ser racional, tiene como dominio al conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$$2(x-1) = 0;\ \ x-1 = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{1\}.$$

Para determinar el tipo de discontinuidad para $x = 1$ se hacen los límites laterales de la función para este valor:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+4x+3}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^- - 1)} = \frac{8}{2\cdot 0^-} = \frac{8}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+4x+3}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^+ - 1)} = \frac{8}{2\cdot 0^+} = \frac{8}{0^+} = +\infty.$$

$$\underline{f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ esencial\ de\ salto\ infinito\ para\ x = 1}.$$

b)

La función $g(x) = 2x^2 + ax + 1$ es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice, se nos dice, lo tiene para $x = \frac{1}{2}$:

$$g'(x) = 4x + a = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + a = 0;\ \ 2 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -2}.$$

c)

Para $a = -1$ la función es $g(x) = 2x^2 - x + 1$.

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2\cdot(1+h)^2-(1+h)+1]-[2\cdot 1^2-1+1]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2\cdot(1+2h+h^2)-1-h+1]-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+4h+2h^2-h-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3+h) \Rightarrow \underline{g'(1) = 3}.$$

****

4º) a) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x+1}$.

b) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \ \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2+5}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+5}{x^2+x} = 2.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+5}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+5-2x^2-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x+5}{x-1} = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 2x - 2\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (2x+1)^3 \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = t \\ 2 \cdot dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int t^3 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8} \cdot (2x+1)^4 + C.$$

Sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$:

$$\frac{1}{8} \cdot (2 \cdot 0 + 1)^4 + C = \frac{9}{8};\ \frac{1}{8} + C = \frac{9}{8} \ \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{8} \cdot (2x+1)^4 + 1}.$$

****

5º) En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

b) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

c) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

$$Datos: P(Al) = 0{,}75;\;\; P(Vu) = 0{,}55;\;\; P(Al \cap Vu) = 0{,}40.$$

a)

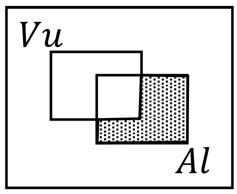
$$P = P(Al \cup Vu) = (Al) + P(Vu) - P(Al \cap Vu) = 0{,}75 + 0{,}55 - 0{,}40 =$$

$$= 1{,}30 - 0{,}40 = \underline{0{,}90}.$$

b)

$$P = P\left(Al/\overline{Vu}\right) = \frac{P\left(Al \cap \overline{Vu}\right)}{P\left(\overline{Vu}\right)} = \frac{P(Al) - P(Al \cap Vu)}{1 - P(Vu)} =$$

$$= \frac{0{,}75 - 0{,}40}{1 - 0{,}55} = \frac{0{,}35}{0{,}45} = \underline{0{,}7778}.$$

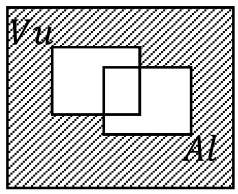


$Al \cap \overline{Vu} = Al - (Al \cap Vu)$

c)

$$P = P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Al \cup Vu) =$$

$$= 1 - 0{,}90 = \underline{0{,}10}.$$



$P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Vu \cup Al)$

****

6º) El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos: $49{,}8;\ \ 34{,}4;\ \ 42{,}1;\ \ 55{,}7;\ \ 54{,}9;\ \ 53;\ \ 54{,}6;\ \ 53{,}3;\ \ 68{,}9\ \ y\ \ 42{,}4$.

a) Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

i)

$$\overline{x}=\frac{49{,}8+34{,}4+42{,}1+55{,}7+54{,}9+53+54{,}6+53{,}3+68{,}9+42{,}4}{10}=\frac{50{,}91}{10}=50{,}91.$$

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$$1-\alpha=0{,}93\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}93=0{,}07\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}035}=1{,}81.$$
$$(1-0{,}035=0{,}9650\ \rightarrow z=1{,}81).$$

Datos: $n=10;\ \ \overline{x}=50{,}91;\ \sigma=\sqrt{64}=8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(50{,}91-1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{10}};\ 50{,}91+1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{10}}\right)=$$

$$=(50{,}91-1{,}81\cdot 2{,}5298;\ 50{,}91+1{,}81\cdot 2{,}5298)=$$

$$=(50{,}91-4{,}5790;\ 50{,}91+4{,}5790).$$

$$\underline{I.C._{93\ \%}=(46{,}33;\ 55{,}49).}$$

b)

$$E=\frac{55{,}49-46{,}33}{2}=\frac{9{,}16}{2}=4{,}58\Rightarrow E'=\frac{E}{2}=\frac{4{,}58}{2}=2{,}29.$$

Datos: $\sigma=8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}81;\ \ E'=2{,}29.$

Siendo $E'=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E'}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E'}\right)^2=\left(1{,}81\cdot\frac{8}{2{,}29}\right)^2=$

$$=(1{,}81\cdot 3{,}4934)^2=6{,}323^2=39{,}98.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 40\ clientes.}$$

****