PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

$b)$ Determine las matrices X e Y que verifican el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$.

$a)$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 104 = -59 \neq 0 \Rightarrow \underline{A \cdot B^t \ es\ invertible}.$$

$b)$

$$\left.\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -4X + 6Y = -2A \\ 9X - 6Y = 3B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5X = -2A + 3B =$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ -6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -6X + 9Y = -3A \\ 6X - 4Y = 2B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5Y = -3A + 2B =$$

$$= -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Un joven estudiante ganó 20.000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor se aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. Es estudiante decide invertir no más de 8.000 euros en la cartera C1 y al menos 3.000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1.

----

a)

Sean x e y las cantidades invertidas (en miles de euros) en las carteras C1 y C2, respectivamente.

Las restricciones que se deducen del enunciado son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 20\ \%\ de\ 20 \\ x+y\leq 50\ \%\ de\ 20 \\ y\geq x \\ x\leq 8;\ y\geq 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\geq 4 \\ x+y\leq 10 \\ x-y\leq 0 \\ x\leq 8;\ y\geq 3 \end{array}\right\}.$$

b)

① $\Rightarrow x+y\geq 4 \Rightarrow y\geq 4-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	4
y	4	0

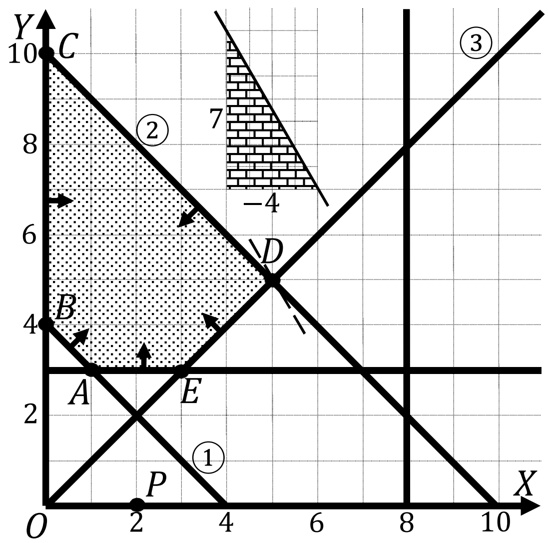
② $\Rightarrow x+y\leq 10 \Rightarrow y\leq 10-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	10
y	10	0

③ $\Rightarrow x-y\leq 0 \Rightarrow y\geq x \Rightarrow P(2,0)\rightarrow No.$

x	0	10
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1,3).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,10).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 10;\ \ x = 5 \Rightarrow D(5,5).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 3 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 3 = 0;\ \ x = 3 \Rightarrow E(3,3).$$

La función de objetivos es $f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y$.

Los valores de la función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,3) = 0{,}07 \cdot 1.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 70 + 120 = 190.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 4.000 = 0 + 160 = 160.$

$C \Rightarrow f(0,10) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 10.000 = 0 + 400 = 400.$

$D \Rightarrow f(5,5) = 0{,}07 \cdot 5.000 + 0{,}04 \cdot 5.000 = 350 + 200 = 550.$

$E \Rightarrow f(3,3) = 0{,}07 \cdot 3.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 210 + 120 = 330.$

El valor máximo se produce en el punto $D(5,5)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

$\underline{Máximo\ beneficio\ invirtiendo\ 5.000\ euros\ en\ C1\ y\ 5.000\ euros\ en\ C2.}$

$c)$

Si decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1, la situación sería la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \geq 20\ \%\ de\ 20 \\ x + y \leq 50\ \%\ de\ 20 \\ y \geq x \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y \geq 4 \\ x + y \leq 10 \\ x - y \leq 0 \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{array}\right\}.$$

La nueva región factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow A(1,3).$ $\qquad B \Rightarrow B(0,4).$ $\qquad C \Rightarrow C(0,10).$

$$F \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2{,}5 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5). \qquad G \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2{,}5 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow G(2{,}5;\ 3).$$

Los valores de la nueva función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,3) = 190.$

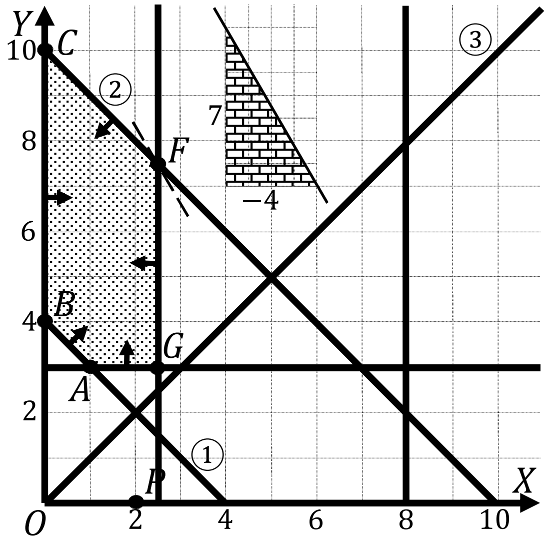
$B \Rightarrow f(0,4) = 160.$

$C \Rightarrow f(0,10) = 400.$

$F \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5) =$

$= 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 7.500 =$

$= 175 + 300 = 475.$



$G \Rightarrow P(2{,}5;\ 3) = 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 175 + 120 = 295.$

El valor máximo se produce ahora en el punto $F(2{,}5;\ 7{,}5)$.

También se hubiera obtenido el punto F por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

$\underline{Máximo\ beneficio\ invirtiendo\ 2.500\ euros\ en\ C1\ y\ 7.500\ euros\ en\ C2.}$

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$.

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ y, clasificando los puntos de discontinuidad.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=1$.

c) Calcule $\int f(x)\cdot dx$.

----

a)

$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=\frac{2}{2^2-4}=+\infty.$$

El dominio de la función $f(x)$ es: $D(f)\Rightarrow R-\{-2,2\}$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

Para los valores $x=-2$ y $x=2$:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ presenta\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito}.$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}.$$

$$Para\ x=1\Rightarrow m=f'(1)=\frac{-1^2-4}{(1^2-4)^2}=\frac{-5}{9}\Rightarrow m=-\frac{5}{9}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1)=\frac{1}{1^2-4}=-\frac{1}{3}\Rightarrow P\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(1,-\frac{1}{3}\right)$:

$$y+\frac{1}{3}=-\frac{5}{9}\cdot(x-1);\ \ 9y+3=-5x+5.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv 5x+9y-2=0}.$$

c)

$$\int f(x)\cdot dx=\int\frac{x}{x^2-4}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2-4=t \\ 2x\cdot dx=dt \\ x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot L|t|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L|x^2 - 4| + C}.$$

****

4º) Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

a) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

d) Calcule el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x \cdot (x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = 3 \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

Los puntos de corte son: $\underline{O(0,0)\ y\ A(3,0)}$.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1 = (x-3) \cdot [(x-3) + 2x] =$$

$$= (x-3)(3x-3) \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x-3)(x-1).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 1), (1, 3)\ y\ (3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 1)$ es:

$$f'(0) = 3 \cdot (0-3)(0-1) = 9 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1, 3)}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deducen los máximos y mínimos relativos de la función, no obstante, se hace su estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 3 \cdot 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-3) \cdot 1 = 3x - 3 + 3x - 9 = 6x - 12.$$

$$f''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: B(1, 4)}.$$

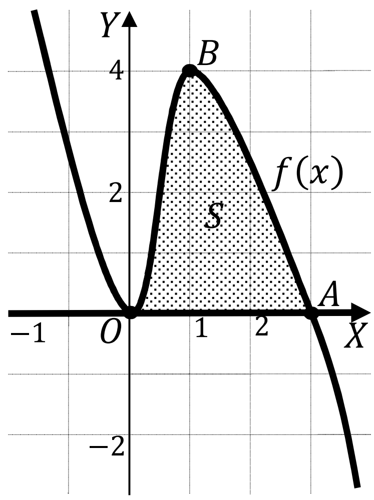
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = 3 \cdot (3-3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A(3, 0)}.$$

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx. ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

$c)$

De los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la situación, que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$

La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^3 [x \cdot (x-3)^2] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [x(x^2 - 6x + 9)] \cdot dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{81 - 216 + 162}{4} = \frac{243 - 216}{4} \Rightarrow \underline{S = \frac{27}{4} u^2 = 6{,}75\ u^2}.$$

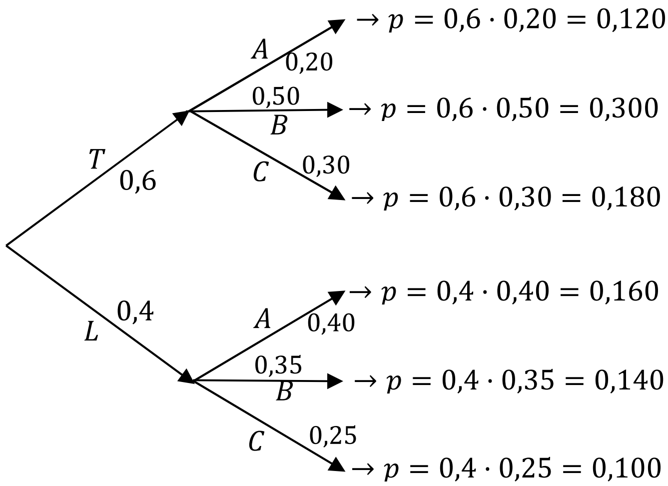
****

5º) Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1.500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron del tipo A, el 50 % fueron del tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto de C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.



a)

$$P = P(T \cap B) = P(T) \cdot P(B/T) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}30}$$

b)

$$P = P(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{P(L) \cdot P(C/L)}{P(T \cap C) + P(L \cap C)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}6 \cdot 0{,}30 + 0{,}4 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}10}{0{,}18 + 0{,}10} = \frac{0{,}10}{0{,}28} =$$

$$= \underline{0{,}3571}.$$

c)

Trans realizó el 60 % de 1.500 de las ventas, que son: $n = 0{,}6 \cdot 1.500 = 900$.

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{900}{1.500} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{3}{5} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{2.697}{7.495} = \underline{0{,}3598}.$$

****

6º) El consumo energético mensual (en Kw/h) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17.280 Kw/h.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en los hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo cometido se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

a)

Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha=0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$

$(1-0{,}04=0{,}960 \ \rightarrow z=1{,}75).$

Datos: $n=64;\ \ \overline{x}=\frac{17.280}{64}=270;\ \ \sigma^2=400 \Rightarrow \sigma=20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(270-1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}};\ 270+1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}}\right);$

$(270-1{,}75\cdot 2{,}5;\ 270+1{,}75\cdot 2{,}5);\ \ (270-4{,}375;\ 270+4{,}375).$

$\underline{I.C._{92\ \%}=(265{,}625;\ 274{,}375).}$

b)

$E=\frac{274{,}375-265{,}625}{2}=\frac{8{,}75}{2}=4{,}375.$

Datos: $\sigma=20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\ \ E=4{,}375.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{20}{4{,}375}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4{,}5714)^2=8^2=64.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 64\ hogares.}$

****