PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

GRUPO 1

Opción a)

a 1) Encuentra el valor o valores de α que hacen que el sistema $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ no tenga solución única. En ese o esos casos, si es posible, calcula sus soluciones.

Un sistema es compatible determinado (solución única) cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango que ha de ser igual al número de incógnitas, en este caso cuatro. Por el contrario, el sistema no tendrá solución única cuando el rango de la matriz de coeficientes sea menor de cuatro; es decir, cuando su determinante sea cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$, y su rango es:

Restando a la cuarta columna la quinta, resulta:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 & 2 \end{vmatrix} = -(a-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-2) \cdot (2+2a-a-a) =$$

$= -(a-2) \cdot 2 = 0$;; $\underline{a = 2}$.

El sistema no tiene solución única cuando α = 2.

Para α = 2 las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&2&1&1\\2&2&1&1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\1&2&1&1&2\\2&2&1&1&3\\1&1&2&2&3\end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que en la matriz ampliada se cumple que $C_1 + C_4 = C_5$, el sistema que determinan es compatible indeterminado, por tener ambas matrices rango tres, por ser $\begin{vmatrix}1&2&0\\1&2&1\\2&2&1\end{vmatrix}=2+4-2-2=2\neq 0$.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\x+2y+z+t=2\\2x+2y+z+t=3\\x+y+2z+2t=3\end{array}\right\}$. Para resolverlo tenemos en cuenta que es compatible indeterminado, por lo que podemos eliminar una ecuación, por ejemplo la última. Haciendo $\underline{t=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\x+2y+z+t=2\\2x+2y+z+t=3\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x+2y=1\\x+2y+z=2-\lambda\\2x+2y+z=3-\lambda\end{array}\right\}\ \to x=1-2y\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}(1-2y)+2y+z=2-\lambda\\2(1-2y)-y+z=3-\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}z=1-\lambda\\-5y+z=1-\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow -5y=0\ ;;\ \underline{y=0}\ ;;\ x=1-2y=1-0=\underline{1=x}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x=1\\y=0\\z=1-\lambda\\t=\lambda\end{cases},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

a 2) Encuentra los puntos P pertenecientes a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$ tales que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto, siendo R(1, 0, 0) y Q(0, -1, 5).

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = -3 + \lambda \\ -2x + 3y = 1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = -2 + 2\lambda \ ;; \ \underline{y = -1 + \lambda} \ ;;$$

$$2x = -3 + y + z = -3 - 1 + \lambda + \lambda = -4 + 2\lambda \ ;; \ \underline{x = -2 + \lambda} \ \Rightarrow \ \underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma $P(-2 + \lambda, \ -1 + \lambda, \ \lambda)$.

Los vectores $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, \ -1, \ 5) - (-2 + \lambda, \ -1 + \lambda, \ \lambda) = (2 - \lambda, \ -\lambda, \ 5 - \lambda) \\ \\ \overrightarrow{PR} = R - P = (1, \ 0, \ 0) - (-2 + \lambda, \ -1 + \lambda, \ \lambda) = (3 - \lambda, \ 1 - \lambda, \ -\lambda) \end{cases}$ son perpendiculares, por lo cual su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda, \ -\lambda, \ 5 - \lambda) \cdot (3 - \lambda, \ 1 - \lambda, \ -\lambda) = 0 \ ;;$$

$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \ ;; \ 3\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \ ;; \ \lambda = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2} =$$

$$= \frac{11 \pm 7}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2} \ ;; \ \underline{\lambda_2 = 9}.$$

$$Para \ \lambda_1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0, \ 1, \ 2)}}.$$

$$Para \ \lambda_2 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(7, \ 8, \ 9)}}.$$

****

Opción b)

b 1) Una ama de casa decide que en sus compras hay fruta por valor de 100 pesetas. El primer día compra con ese dinero dos kilos de plátanos, uno de kiwis y medio de manzanas. A los dos días con el mismo dinero compra un kilo de plátanos y tres de manzanas al mismo precio y un kilo de mangos. Los dos días siguientes compra, también con 100 pesetas cada día y con los mismos precios, tres kilos de plátanos y 800 gramos de mangos y (al día siguiente) medio de kiwis, kilo y cuarto de mangos y un kilo de manzanas. Averigua los precios de cada fruta.

Sean x, y, z, t los precios por kilo de plátanos, kiwis, manzanas y mangos, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+\frac{1}{2}z=100 \\ x+3z+t=100 \\ 3x+0'8t=100 \\ \frac{1}{2}y+1'25t+z=100 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x+2y+z=200 \\ x+3z+t=100 \\ 30x+8t=1.000 \\ 2y+5t+4z=400 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x+2y+z=200 \\ x+3z+t=100 \\ 15x+4t=500 \\ 2y+4z+5t=400 \end{array}\right\}.$$

Resolvemos por Gauss. La matriz ampliada es $M=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 15 & 0 & 0 & 4 & 500 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 400 \end{pmatrix}$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 200 \\ 15 & 0 & 0 & 4 & 500 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 400 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & -11 & -4 & -200 \\ 0 & 0 & -45 & -11 & -1000 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 400 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -5'5 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 45 & 11 & 1000 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 400 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -5'5 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 45 & 11 & 1000 \\ 0 & 0 & 15 & 9 & 600 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -5'5 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 200 \\ 0 & 0 & 45 & 11 & 1000 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -5'5 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -800 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

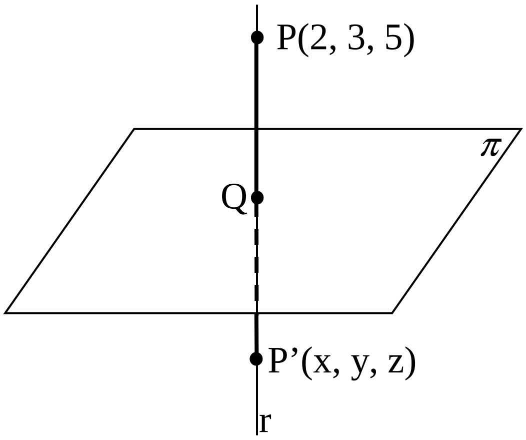
$$\Rightarrow -16t=800 \;;;\; t=\frac{800}{16}=\underline{50=t} \;;;\; 5z+150=200 \;;;\; 5z=50 \;;;\; \underline{z=10} \;;;\; y-5'5z-2t=-100 \;;;$$

$$y-55-100=-100 \;;;\; \underline{y=55} \;;;\; x+3z+t=100 \;;;\; x+30+50=100 \;;;\; \underline{x=20}.$$

El kilo de plátanos, kiwis, manzanas y mangos son 20, 55, 10 y 50 pts, respectivamente.

****

b 2) Encuentra el punto simétrico de P(2, 3, 5) respecto del plano $\pi \equiv x + y - 3z = 1$.



El vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -3)$.

La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo cuál su vector director es el vector normal del plano π; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - 3z = 1 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2 + \lambda) + (3 + \lambda) - 3 \cdot (5 - 3\lambda) = 1 \ ;; \ 2 + \lambda + 3 + \lambda - 15 + 9\lambda = 1 \ ;;$$

$$11\lambda - 10 = 1 \ ;; \ 11\lambda = 11 \ ;; \ \underline{\lambda = 1} \ \Rightarrow \ \underline{Q(3,\ 4,\ 2)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow \ Q - P = P' - Q \ ;; \ (3,\ 4,\ 2) - (2,\ 3,\ 5) = (x,\ y,\ z) - (3,\ 4,\ 2) \ ;;$$

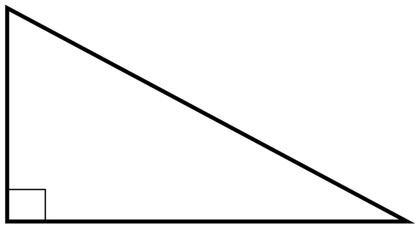
$$(1,\ 1,\ -3) = (x - 3,\ y - 4,\ z - 2) \Rightarrow \left.\begin{cases} x - 3 = 1 \ \rightarrow \ \underline{x = 4} \\ y - 4 = 1 \ \rightarrow \ \underline{y = 5} \\ z - 2 = -3 \ \rightarrow \ \underline{z = -1} \end{cases}\right\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(4,\ 5,\ -1)}}.$$

****

GRUPO 2

Opción c)

c 1) Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale 4 centímetros.



$x+y=2$;; $\underline{y=x-4}$.

$S=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\cdot(x-4)}{2}=\underline{\frac{1}{2}\left(x^2-4x\right)=S}$

El área es máxima cuando su derivada es cero:

$S'=\frac{1}{2}\cdot(2x-4)=x-2=0 \Rightarrow \underline{x=2}$;; $y=4-2=\underline{2=y}$.

<u>Se trata de un triángulo rectángulo e isósceles cuyos catetos miden dos centímetros.</u>

El valor del área es: $S=\frac{2\cdot 2}{2}=\underline{\underline{2\ cm^2=S}}$.

Justificación de que se trata de un máximo:

$S''=1>0 \Rightarrow$ Máximo, como se quería justificar.

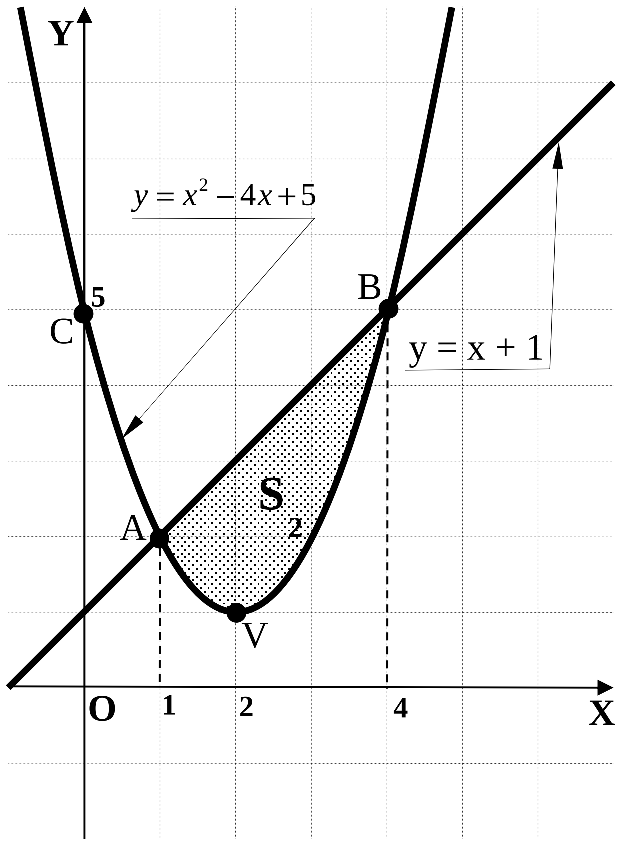
****

c 2) Dibuja la superficie limitada por la parábola $y=x^2-4x+5$ y la recta $y=x+1$. Calcula su área.

Los puntos de corte de la parábola con la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-4x+5 \\ \\ y=x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x^2-4x+5=x+1\ ;;\ x^2-5x+4=0\ ;;\ x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=$$

$$=\frac{5\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=1\ \rightarrow\ \underline{A(1,\ 2)} \\ \\ x_2=4\ \rightarrow\ \underline{B(4,\ 5)} \end{cases}.$$



Los puntos de corte de la parábola con los ejes son:

$$Eje\ \ X\ \Rightarrow\ x^2-4x+5=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-25}}{2}\Rightarrow x\notin R\Rightarrow\ \underline{\text{No corta a X.}}$$

$$Eje\ \ Y\Rightarrow x=0\Rightarrow y=5\ \Rightarrow\ \underline{C(5,\ 0)}.$$

La representación gráfica de las dos funciones es, aproximadamente, la que indica la figura.

Como puede apreciarse, en el intervalo correspondiente al área a calcular, las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

El área pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^4\left[(x+1)-\left(x^2-4x+5\right)\right]\cdot dx=\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4=$$

$$=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)=-\frac{64}{3}+40-16+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=28-\frac{63}{3}-\frac{5}{2}=28-21-\frac{5}{2}=$$

$$=7-\frac{5}{2}=\frac{14-5}{2}=\frac{9}{2}=\underline{\underline{4'5\ u^2=S}}.$$

****

Opción d)

d 1) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1} \right)$. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (sen\ x)^{tag\ x}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1} \right) = \sqrt{\frac{1}{0}+1} - \sqrt{\frac{1}{0}-1} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1} \right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right) - \left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{1}{x}-1}} =$$

$$= \frac{2}{\infty + \infty} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}\ .$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (sen\ x)^{tag\ x} = \left(sen\ \frac{\pi}{2} \right)^{tag\ \frac{\pi}{2}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{número\ \ e\} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + sen\ x - 1)^{tag\ x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{sen\ x - 1}} \right)^{tag\ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{sen\ x - 1}} \right)^{\frac{1}{sen\ x-1} \cdot (sen\ x-1) \cdot tag\ x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{sen\ x - 1}} \right)^{\frac{1}{sen\ x-1}} \right]^{(sen\ x-1) tag\ x} = \left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{sen\ x - 1}} \right)^{\frac{1}{sen\ x-1}} \right]^{\frac{(sen\ x-1) sen\ x}{\cos x}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(sen\ x-1) sen\ x}{\cos x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(sen\ x-1)(sen\ x+1) sen\ x}{\cos x (sen\ x+1)}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(sen^2 x-1) sen\ x}{\cos x (sen\ x+1)}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos^2 x \cdot sen\ x}{\cos x (sen\ x+1)}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x \cdot sen\ x}{sen\ x+1}} = e^{\frac{-0}{2}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

****

d 2) Sea f(x) la función dada por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \;\; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+1} & si \;\; x<0 \end{cases}$. Encuentra los valores de las constantes α, b y c que hacen que f sea continua y derivable dos veces en x = 0. Dibuja la gráfica de f.

La función f(x) es continua en R, $\forall a,b,c \in R$, excepto para x = 0, cuya continuidad es dudosa.

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+ax+b}{cx^2+1} = \dfrac{b}{1} = \underline{b} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = f(0) = \dfrac{1}{1} = \underline{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=1}}.$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+1}{cx^2+1} & si \;\; x<0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$g(x)=\frac{x^2+ax+1}{cx^2+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{(2x+a)\cdot(cx^2+1)-(x^2+ax+1)\cdot 2cx}{(cx^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2cx^3+2x+acx^2+a-2cx^3-2acx^2-2cx}{(cx^2+1)^2}=\frac{2x+a-acx^2-2cx}{(cx^2+1)^2}=\underline{\frac{-acx^2+(2-2c)x+a}{(cx^2+1)^2}}=g'(x).$$

$$h(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow h'(x)=\frac{-1\cdot 1}{(x+1)^2}=\underline{\frac{-1}{(x+1)^2}}=h'(x).$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-acx^2+(2-2c)x+a}{(cx^2+1)^2} & si \;\; x<0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} a & si \;\; x<0 \\ -1 & si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a=-1}}.$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{cx^2+1} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$ y la función derivada resulta ser la siguiente: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-acx^2+(2-2c)x-1}{\left(cx^2+1\right)^2} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

Como tiene que ser derivable dos veces para x = 0, tiene que ser f’’(x) igual por la izquierda y por la derecha de 0.

Para x = 0 es $g(x)=\dfrac{x^2-x+1}{cx^2+1} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{cx^2+(2-2c)x-1}{\left(cx^2+1\right)^2}$.

$$g''(x)=\frac{(2cx+2-2c)\left(cx^2+1\right)^2-\left[cx^2+(2-2c)x-1\right]\cdot 2\cdot\left(cx^2+1\right)\cdot 2cx}{\left(cx^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{(2cx+2-2c)\left(cx^2+1\right)-4cx\left(cx^2+2x-2cx-1\right)}{\left(cx^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{2c^2x^3+2cx+2cx^2+2-2c^2x^2-2c-4c^2x^3-8cx^2+8c^2x^2+4cx}{\left(cx^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{6cx+2+6c^2x^2-2c-2c^2x^3-6cx^2}{\left(cx^2+1\right)^3}=2\cdot\frac{3cx+1+3c^2x^2-c-c^2x^3-3cx^2}{\left(cx^2+1\right)^3}=$$

$$=\underline{2\cdot\frac{-c^2x^3+3c(c-1)x+(1-c)}{\left(cx^2+1\right)^3}=g''(x)}.$$

$$h(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow h'(x)=\frac{-1\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow h''(x)=\frac{1\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\underline{\frac{2}{(x+1)^3}=h''(x)}.$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2\cdot\dfrac{-c^2x^3+3c(c-1)x+(1-c)}{\left(cx^2+1\right)^3} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{2}{(x+1)^3} & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(0)=\begin{cases} 2-2c & si\ \ x<0 \\ 2 & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}.$$

****