PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

GRUPO 1

Opción a)

a 1) Construye un triángulo rectángulo con dos catetos de igual longitud tal que su hipotenusa es el segmento de vértices A(2, 2, 2) y B(3, -2, 1) y el tercer vértice está en el plano $\pi \equiv x+2y-z=1$. Calcula también el área de dicho triángulo.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ -4,\ -1)$.

El punto medio de A y B es $M\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$.

El plano β mediador o mediatriz del segmento de extremos A y B es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v}=(1,\ -4,\ -1)$ y contiene al punto $M\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$.

Su expresión general es de la forma $\beta \equiv x-4y-z+D=0$. Por contener al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\beta \equiv x-4y-z+D=0 \\ M\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{2}-\frac{3}{2}+D=0\ ;;\ 1+D=0\ ;;\ D=-1 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x-4y-z-1=0}.$$

Los planos β y π determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-4y-z-1=0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x-4y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=0} \;;;\; \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1+\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto genérico de r es $P(1+\lambda,\ 0,\ \lambda)$.

El punto P con los puntos A(2, 2, 2) y B(3, -2, 1) determina los vectores: $\overrightarrow{m}=\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{BP}$, que son los siguientes:

$$\overrightarrow{m}=P-A=(\lambda-1,\ -2,\ \lambda-2) \text{ y } \overrightarrow{n}=P-B=(\lambda-2,\ 2,\ \lambda-1).$$

Los vectores $\overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{n}$ tienen que ser perpendiculares, por lo que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Rightarrow (\lambda-1,\ -2,\ \lambda-2)\cdot(\lambda-2,\ 2,\ \lambda-1)=0 \;;;$$

$$\lambda^2-2\lambda-\lambda+2-4+\lambda^2-\lambda-2\lambda+2=0 \;;;\; 2\lambda^2-6\lambda=0 \;;;\; \lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=0} \;;;\; \underline{\lambda_2=3}.$$

Por otra parte tiene que ser $\left|\overrightarrow{m}\right|=\left|\overrightarrow{n}\right|$, lo cual se cumple para cualquier valor real de λ por tener los dos vectores componentes iguales en valor absoluto, por lo tango las soluciones halladas son hábiles las dos.

Los puntos pedidos son $\underline{\underline{P_1(1,\ 0,\ 0)}}$ y $\underline{\underline{P_2(4,\ 0,\ 3)}}$.

Los vectores son $\overrightarrow{m}=(-1,\ -2,\ -2)$ y $\overrightarrow{n}=(-2,\ 2,\ -1)$.

El área del triángulo es $S=\frac{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}{2}=\frac{2\cdot\left|\overrightarrow{m}\right|}{2}=\left|\overrightarrow{m}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$.

$$\underline{\underline{S_{ABP}=3\,u^2}}$$

****

a 2) Prueba si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- - Si en un sistema compatible indeterminado $A \cdot X = B$ intercambiamos los valores de dos componentes de b con distinto valor obtenemos un sistema incompatible.

- - Si el sistema es homogéneo (es decir $B = 0$) siempre es compatible indeterminado.

La primera afirmación es cierta.

Si el sistema es compatible indeterminado implica que las matrices de coeficientes A y ampliada (A/B) tienen el mismo rango.

Si se alteran dos coeficientes de B de distinto valor se altera el rango de la matriz (A/B) y el rango de A sigue siendo el mismo.

La segunda afirmación es falsa.

Como las matrices de coeficientes y ampliada tienen siempre el mismo rango, puede afirmarse que el sistema es compatible (determinado o indeterminado), dependiendo del rango de la matriz de coeficientes: si su rango coincide con el número de incógnitas es compatible determinado (solución trivial) y si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

****

Opción b)

b 1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. Comprueba que $A^3 = I$ y que $A^{-1} = A^t$. Utiliza estas relaciones para resolver: $\left(A^4+3A^3+A-3I\right)\cdot X=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=A^2}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I=A^3}}.$$

Teniendo en cuenta que $A\cdot A^{-1}=I$ y que $A^2\cdot A=A^3=I \Rightarrow \underline{A^2=A^{-1}}$.

$$A^t=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^2=A^t}.$$

$$\left.\begin{array}{l}A^2=A^t\\A^2=A^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{A^t=A^{-1}}}$$

$$A^4+3A^3+A-3I=A^3\cdot A+3I+A-3I=I\cdot A+A=A+A=\underline{2A}.$$

$$2A\cdot X=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}\;;;\;\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&0&2\\0&0&2&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x_2=4\\2x_4=8\\2x_3=6\\2x_1=2\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{\underline{\left\{\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3\\x_4=4\end{array}\right\}}}.$$

****

b 2) Encuentra el valor o valores de m que hacen que las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ mx - z + 1 - m = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ formen un ángulo de 45º.

El ángulo que forman las rectas r y s es el mismo que forman sus vectores directores.

Los vectores directores de las rectas son linealmente dependientes de los vectores normales de los planos que las determinan.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ mx - z + 1 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ 0)\ y\ \overrightarrow{n_2} = (m,\ 0,\ -1).$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + mk + 2j = i + 2j + mk = \underline{(1,\ 2,\ m) = \overrightarrow{v_r}}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{p_1} = (1,\ -1,\ 2)\ y\ \overrightarrow{p_2} = (2,\ -2,\ 3).$$

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3i + 4j - 2k + 2k + 4i - 3j = i + j = \underline{(1,\ 1,\ 0) = \overrightarrow{v_s}}.$$

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(1,\ 2,\ m) \cdot (1,\ 1,\ 0)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{1 + 2 + 0}{\sqrt{1 + 4 + m^2} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{5 + m^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;;\ 3 = \sqrt{5 + m^2}\ ;;\ 9 = 5 + m^2\ ;;\ m^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{m = \pm 2}}.$$

****

GRUPO 2

Opción c)

c 1) Sea $f(x)=\frac{x+a}{x^2+b}$. Encuentra los valores de los parámetros α y b que hacen que f(x) tenga puntos críticos en x = -2 y x = 2. Estudia en ese caso si esos puntos son máximos o mínimos.

Una función tiene un punto crítico para un valor de x cuando se anula la primera derivada para ese valor.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+b)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+b)^2}=\frac{x^2+b-2x^2-2ax}{(x^2+b)^2}=\underline{\frac{-x^2-2ax+b}{(x^2+b)^2}=f'(x)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2)=0 \Rightarrow \frac{-(-2)^2-2a\cdot(-2)+b}{\left[(-2)^2+b\right]^2}=0\ ;;\ -4+4a+b=0\ ;;\ 4a+b=4 \\ \\ f'(2)=0 \Rightarrow \frac{-2^2-2a\cdot 2+b}{(2^2+b)^2}=0\ ;;\ -4-4a+b=0\ ;;\ -4a+b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=8\ ;;\ \underline{\underline{b=4}}.$$

$$4a+b=4\ ;;\ 4a+4=4 \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}.$$

La función resulta ser $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ y $f'(x)=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+4)^2-(4-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+4)-4x(4-x^2)}{(x^2+4)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3}=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}=\underline{\frac{2x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}=f''(x)}.$$

$f''(-2)=\frac{-4(4-12)}{(4+4)^3}=\frac{32}{8^3}>0 \Rightarrow$ <u>Mínimo relativo para x = -2.</u>

$f''(2)=\frac{4(4-12)}{(4+4)^4}=\frac{-32}{8^3}<0 \Rightarrow$ <u>Máximo relativo para x = 2.</u>

****

c 2) Siendo $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x), así como la presencia de asíntotas y dibuja su gráfica.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+4\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{x^2+4-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\underline{\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}}\ .$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=0\ ;;\ 4-x^2=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-2}\ ;;\ \underline{x_2=2}\ .$$

Teniendo en cuenta que el dominio de f es R, las raíces de la primera derivada dividen la recta real en tres intervalos donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente; considerando, por ejemplo, x = 0 es $f'(0)=\frac{4-0}{(0+4)^2}>0\ \Rightarrow$ creciente.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Decreciente\ \Rightarrow\ x\in(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Creciente\ \Rightarrow\ x\in(-2,\ 2)}}$$

Una función es convexa $(\cup)$ o cóncava $(\cap)$ cuando su segunda derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+4\right)^2-\left(4-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+4\right)\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{-2x\cdot\left(x^2+4\right)-4x\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{2x^3-24x}{\left(x^2+4\right)^3}=\underline{\frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=f''(x)}\ .$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=0\ ;;\ 2x\left(x^2-12\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=-2\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_3=2\sqrt{3}}\ .$$

Teniendo en cuenta que el dominio de f es R, las raíces de la segunda derivada dividen la recta real en cuatro intervalos donde la función es, alternativamente, cóncava o convexa; considerando, por ejemplo, x = 1 es $f''(1)=\frac{2(1-12)}{(1+4)^2}<0\ \Rightarrow$ cóncava $(\cap)$.

De lo anterior se deducen los periodos de concavidad y convexidad, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Convexidad \Rightarrow (\cup)\ x \in \left(-2\sqrt{3},\ 0\right) \cup \left(2\sqrt{3},\ +\infty\right)}}$$

$$\underline{\underline{Concavidad \Rightarrow (\cap)\ x \in \left(-\infty,\ -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\ 2\sqrt{3}\right)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos de la función cuando $x \to \infty$:

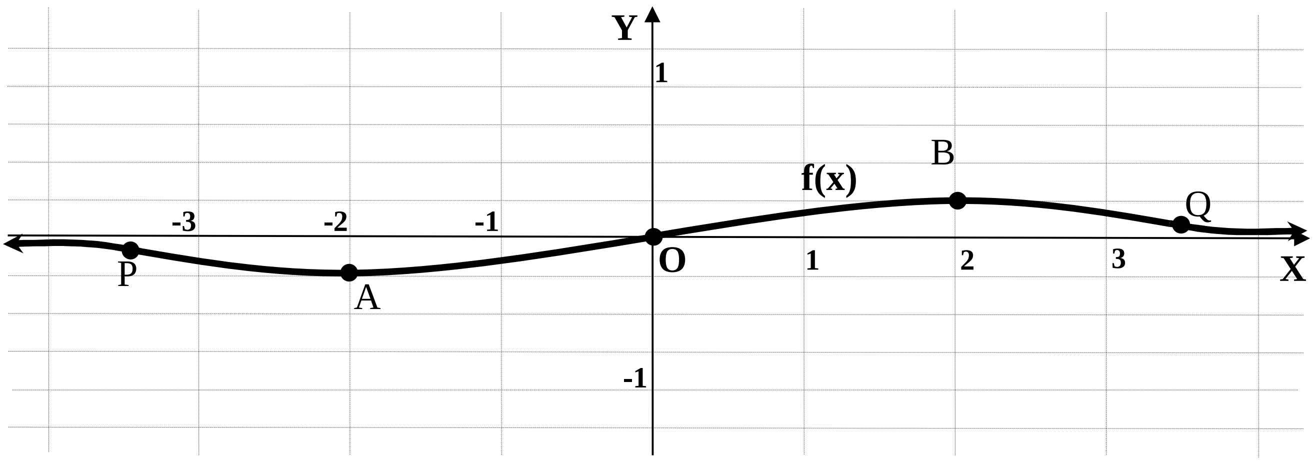
$$\underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to -\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to \infty}{lím} \frac{x}{x^2+4} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{y=0}}\ (Eje\ de\ abscisas)$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función valga más o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$x^2+4 \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}}$$

Asíntotas oblicuas: No tiene. (para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que sea racional y el grado del denominador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Con objeto de facilitar la representación gráfica se calculas los máximos y mínimos de la función.



$$f''(-2) = \frac{-4(4-12)}{(4+4)^3} = \frac{32}{8^3} > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo relativo para x = -2.}$$

$$f(-2) = \frac{-2}{(-2)^2+4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(-2,\ \frac{-1}{4}\right)}.$$

$$f''(2) = \frac{4(4-12)}{(4+4)^4} = \frac{-32}{8^3} < 0 \Rightarrow \text{ Máximo relativo para x = 2.}$$

$$f(2) = \frac{2}{2^2 + 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Máximo:\ B\left(2,\ \frac{1}{4}\right)}.$$

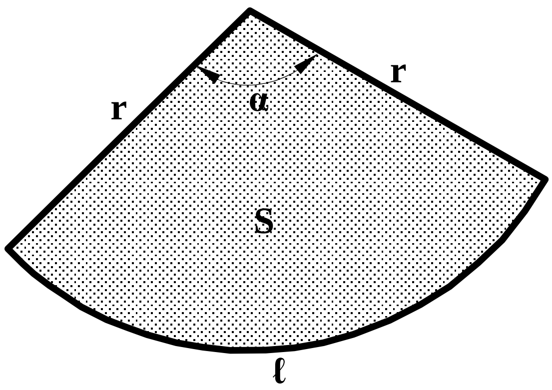
Teniendo en cuenta que la función está definida en R, que pasa por el origen de coordenadas y que por ser f(-x) = -f(x) es simétrica con respecto al origen, la representación gráfica es, aproximadamente, la de la figura anterior.

Los puntos P, O y Q son los puntos de inflexión.

****

Opción d)

d 1) Un agricultor va a vallar una finca de 10.000 metros cuadrados en forma de sector circular. Encuentra las dimensiones del radio y el ángulo del sector que harían que el agricultor emplease menos metros de valla.



La superficie de un sector circular viene dada por la fórmula: $S =$

El perímetro es $p = 2r + \ell$, que tiene que ser mínimo.

Para expresar el perímetro en función de una sola variable tenemos en cuenta las siguientes proporciones:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} Si\ \ a\ \ 360^{\circ}\ \ corresponde\ \ 2\pi r \\ \quad a\ \ \alpha^{\circ}\ \ \ corresponde\ \ \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{360^{\circ}}{\alpha^{\circ}} = \dfrac{2\pi r}{\ell} \\ \\ \left.\begin{array}{l} Si\ \ a\ \ 360^{\circ}\ \ corresponde\ \ \pi r^2 \\ \quad a\ \ \alpha^{\circ}\ \ \ corresponde\ \ S \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{360^{\circ}}{\alpha^{\circ}} = \dfrac{\pi r^2}{S} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi r}{\ell} = \frac{\pi r^2}{S} \Rightarrow \ell = \frac{2\pi r \cdot S}{\pi r^2} = \underline{\frac{2S}{r} = \ell}.$$

Teniendo en cuenta que S = 10.000 metros cuadrados: $\ell = \dfrac{20.000}{r}$.

Sustituyendo la expresión de ℓ en el perímetro:

$$p = 2r + \ell = 2r + \frac{20.000}{r} = \underline{\frac{2r^2 + 20.000}{r} = p}.$$

Para que el perímetro sea mínimo su derivada tiene que ser cero:

$$p' = \frac{4r \cdot r - \left(2r^2 + 20.000\right) \cdot 1}{r^2} = \frac{4r^2 - 2r^2 - 20.000}{r^2} = \underline{\frac{2r^2 - 20.000}{r^2} = p'}.$$

$$p' = 0 \Rightarrow \frac{2r^2 - 20.000}{r^2} = 0\ ;;\ 2r^2 - 20.000 = 0\ ;;\ r^2 - 10.000 = 0\ ;;\ r^2 = 10.000\ ;;\ \underline{r = \pm 100}.$$

La solución r = -100 carece de sentido lógico (es para máximo), por lo que la solución lógica es r = 100.

$$\ell = \frac{20.000}{r} = \frac{20.000}{100} = \underline{200 = \ell}.$$

Para hallar el ángulo α tenemos en cuenta la proporción utilizada al principio:

$$\left.\begin{array}{l} Si \;\; a \;\; 360^{o} \;\; corresponde \;\; 2\pi r \\ \;\; a \;\; \alpha^{o} \;\; corresponde \;\; \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{360^{o}}{\alpha^{o}} = \frac{2\pi r}{\ell} \Rightarrow \alpha^{o} = \frac{360 \cdot \ell}{2\pi r}.$$

Aplicando la fórmula a los datos obtenidos:

$$\alpha^{o} = \frac{360 \cdot 200}{2 \cdot 3'14 \cdot 100} = \frac{360}{3'14} = 114'59 = \underline{114^{o}\;\; 35'\;\; 30'' = \alpha}.$$

<u>El radio tiene que ser de 100 metros y el ángulo α = 114º 35’ 30’’.</u>

****

d 2) Utiliza el cambio de variable x = cos t para hallar el valor de la siguiente integral indefinida: $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$.

La integral indefinida $A=\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ se resuelve del modo siguiente:

$$A=\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=\cos t \\ dx=-sen\ t \cdot dt \\ t=arc\ \cos x \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=-\int \frac{1+\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \cdot sen\ t\ dt=-\int \frac{1+\cos t}{\sqrt{sen^2\, t}} \cdot sen\ t\ dt=$$

$$=-\int \frac{1+\cos t}{sen\ t} \cdot sen\ t\ dt=-\int (1+\cos t) \cdot dt=-t-sen\ t+C=\underline{-arc\ \cos t-sen\ (arc\ \cos t)+C=A}.$$

Teniendo en cuenta el cálculo anterior, la integral pedida se resuelve así:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx=\left[-arc\ \cos t-sen\ (arc\ \cos t)\right]_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[-arc\ \cos \frac{1}{2}-sen\left(arc\ \cos \frac{1}{2}\right)\right]-\left[-arc\ \cos 0-sen\ (arc\ \cos 0)\right]=\left(-\frac{\pi}{3}-sen\ \frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-sen\ \frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{-2\pi-3\sqrt{3}+3\pi+6}{6}=\underline{\underline{\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}}}=I\ .$$

****