PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

GRUPO 1

Opción A

1º) Sea la función definida por $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x \le 0 \\ (ax^2+bx+c)e^{-x} & si\ \ x>0 \end{cases}$.

a) Encuentra los valores de las constantes a, b y c que hacen que f sea continua y derivable dos veces en x = 0.

b) Dibuja esquemáticamente la gráfica de f(x), poniendo especial atención en el punto $x=0$.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} sen\ x = \underline{0} = \underline{f(0)} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(ax^2+bx+c)e^{-x}\right] = c\cdot e^0 = c\cdot 1 = \underline{c} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)} \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x \\ (2x+b)e^{-x}-(ax^2+bx)e^{-x} \end{cases}=\begin{cases} \cos x & si \;\; x\le 0 \\ \left[-ax^2+(2-b)x+b\right]e^{-x} & si \;\; x>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=\cos 0=\underline{1} \\ f'(0^+)=b\cdot e^0=b\cdot 1=\underline{b} \end{cases} \Rightarrow \;\; f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \;\; \underline{\underline{b=1}}$$

La función resultante con los datos hallados es $f(x)=\begin{cases} sen\; x & si \;\; x\le 0 \\ (ax^2+x)e^{-x} & si \;\; x>0 \end{cases}$, cuya primera derivada es $f'(x)=\begin{cases} \cos x & si \;\; x\le 0 \\ (-ax^2+x+1)e^{-x} & si \;\; x>0 \end{cases}$.

Para que sea derivable una segunda vez es necesario que la segunda derivada sea igual a la izquierda y a la derecha de x = 0:

$$f''(x)=\begin{cases} -sen\; x \\ (-2ax+1)e^{-x}-(ax^2+x+1)e^{-x} \end{cases}=\begin{cases} -sen\; x \\ (-2ax+1-ax^2-x-1)e^{-x} \end{cases}=\begin{cases} -sen\; x \\ \left[-ax^2-(2a+1)x\right]e^{-x} \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} -sen\; x & si \;\; x\le 0 \\ -x(ax+2a+1)e^{-x} & si \;\; x>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(0^-)=-sen\; 0=\underline{0} \\ f''(0^+)=-0\cdot(2a+1)\cdot e^0=\underline{0} \end{cases} \Rightarrow \underline{f''(0^-)=f''(0^+),\;\; \forall a\in R} \Rightarrow \;\; \underline{\underline{a\in R}}$$

****

2º) Calcula los límites: $a)\ \lim_{x \to 1} \frac{L\,x}{1-x}$ $\qquad b)\ \lim_{x \to \pi^+} \frac{x^2-3x}{sen\ x}$

$$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{L\,x}{1-x} = \frac{L1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{-x} =$$

$$= \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$b)\ \lim_{x \to \pi^+} \frac{x^2-3x}{sen\ x} = \frac{\pi^2 - 3\pi}{sen\ \pi^+} = \frac{\pi(\pi-3)}{0^-} = \frac{>0}{0^-} = \underline{\underline{-\infty}}$$

****

Opción B

1º) Dibuja la región del plano limitado por las gráficas de $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$ y de y = 5. Calcula también el área de dicha región.

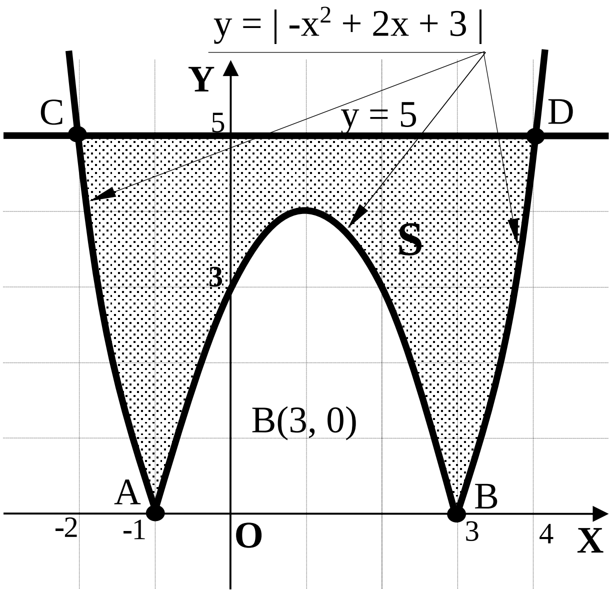
Los puntos de corte de la gráfica de $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$ son los siguientes:

$$\left| -x^2 + 2x + 3 \right| = 0 \;\;;;\;\; -x^2 + 2x + 3 = 0 \;\;;;\;\; x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3,\ 0)} \end{cases}.$$

Los puntos de corte de las dos gráficas son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right| \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| -x^2 + 2x + 3 \right| = 5 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 = 5 \;\;;;\;\; x^2 - 2x + 2 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x - 3 = 5 \;\;;;\;\; x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$(1) \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \underline{x \notin R}$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow \underline{C(-2,\ 5)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{D(4,\ 5)} \end{cases}.$$

La representación gráfica, aproximada, es la que se indica en la figura, donde el área a determinar es la sombreada.

De la observación de la figura y aplicando las propiedades de las integrales definidas, teniendo en cuenta que las ordenadas de la gráfica de y = 5 son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la gráfica de $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$, el valor de la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{4} \left(5 - \left| -x^2 + 2x + 3 \right|\right) \cdot dx = \int_{-2}^{4} 5 \cdot dx - \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - 2x - 3\right) \cdot dx - \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) \cdot dx -$$

$$-\int_{3}^{4}\left(x^{2}-2x-3\right)\cdot dx=[5x]_{-2}^{4}+\int_{-1}^{-2}\left(x^{2}-2x-3\right)\cdot dx+\int_{3}^{-1}\left(-x^{2}+2x+3\right)\cdot dx+\int_{4}^{3}\left(x^{2}-2x-3\right)\cdot dx=$$

$$=5\cdot 4-5\cdot(-2)+\left[\frac{x^{3}}{3}-x^{2}-3x\right]_{-1}^{-2}+\left[-\frac{x^{3}}{3}+x^{2}+3x\right]_{3}^{-1}+\left[\frac{x^{3}}{3}-x^{2}-3x\right]_{4}^{3}=$$

$$=20+10+\left[\frac{(-2)^{3}}{3}-(-2)^{2}-3\cdot(-2)\right]-\left[\frac{(-1)^{3}}{3}-(-1)^{2}-3\cdot(-1)\right]+\left[-\frac{(-1)^{3}}{3}+(-1)^{2}+3\cdot(-1)\right]-$$

$$-\left(-\frac{3^{3}}{3}+3^{2}+3\cdot 3\right)+\left(\frac{3^{3}}{3}-3^{2}-3\cdot 3\right)-\left(\frac{4^{3}}{3}-4^{2}-3\cdot 4\right)=$$

$$=30-\frac{8}{3}-4+6+\frac{1}{3}+1-3+\frac{1}{3}+1-3+9-9-9+9-9-9-\frac{64}{3}+16+12=38-\frac{70}{3}=\frac{114-70}{3}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{44}{3}\,u^{2}=S}}$$

****

GRUPO 2

Opción C

1º) Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean P(1, 2, 3) y Q(-1, 4, 3) y que el tercer vértice R esté en el plano $\pi \equiv x+y+z=2$. ¿Qué área tiene?

La longitud del lado del triángulo equilátero es la distancia entre los puntos P y Q, que es la misma que el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$l=\overline{PQ}=\sqrt{(-1,\ 4,\ 3)-(1,\ 2,\ 3)}=\sqrt{(-2,\ 2,\ 0)}=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=\sqrt{8}=\underline{2\sqrt{2}\ unidades=l}$$

Los puntos pertenecientes al plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$ se pueden expresar de la siguiente forma: $R(x,\ y,\ 2-x-y)$.

Por ser el triángulo equilátero tiene que ser $\overline{PQ}=\overline{PR}=\overline{QR}$:

$$l=\overline{PR}=\sqrt{(x,\ y,\ 2-x-y)-(1,\ 2,\ 3)}=\sqrt{(x-1,\ y-2,\ 2-x-y-3)}=\sqrt{(x-1,\ y-2,\ -x-y-1)}=$$

$$=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y+1)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+y^2-4y+4+x^2+y^2+1+2xy+2x+2y}=$$

$$=\underline{\sqrt{2x^2+2y^2+2xy-2y+6}=\overline{PR}}$$

$$l=\overline{QR}=\sqrt{(x,\ y,\ 2-x-y)-(-1,\ 4,\ 3)}=\sqrt{(x+1,\ y-4,\ -x-y-1)}=$$

$$=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2+(x+y+1)^2}=\sqrt{x^2+2x+1+y^2-8y+16+x^2+y^2+1+2xy+2x+2y}=$$

$$=\underline{\sqrt{2x^2+2y^2+2xy+4x-6y+18}=\overline{QR}}$$

$$l=\overline{PR}=\overline{QR}\ \Rightarrow\ \sqrt{8}=\sqrt{2x^2+2y^2+2xy-2y+6}=\sqrt{2x^2+2y^2+2xy+4x-6y+18}\ ;;$$

$$2x^2+2y^2+2xy-2y+6=2x^2+2y^2+2xy+4x-6y+18\ ;;\ -2y+6=4x-6y+18\ ;;$$

$$4x-4y+12=0\ ;;\ x-y+3=0\ ;;\ \underline{y=x+3}$$

Sustituyendo en la expresión del lado:

$$l=\overline{PR}=\sqrt{8}=\sqrt{2x^2+2(x+3)^2+2x(x+3)-2(x+3)+6}\ ;;\ 4=x^2+(x+3)^2+x(x+3)-(x+3)+3$$

$$4=x^2+x^2+6x+9+x^2+3x-x-3+3 \;\;;;\;\; 4=3x^2+8x+9 \;\;;;\;\; 3x^2+8x+5=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-8\pm 2}{6}=\frac{-4\pm 1}{3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1=-1} \\ \underline{x_2=-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la expresión del punto R es $R(x,\ x+3,\ -2x-1)$, los puntos pedidos son los siguientes:

$$x_1=-1 \;\rightarrow\; y_1=-1+3=2 \;\rightarrow\; z_1=-2\cdot(-1)-1=2-1=1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R_1(-1,\ 2,\ 1)}}$$

$$x_2=-\frac{5}{3} \;\rightarrow\; y_1=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; z_1=-2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-1=\frac{10}{3}-1=\frac{7}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R_2\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}\right)}}$$

También se podía resolver este apartado de la siguiente forma:

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $M(0,\ 3,\ 3)$ y el vector que determinan los punto dados es $\overrightarrow{PQ}=(-2,\ 2,\ 0)$, con lo cual, el plano mediatriz del segmento tiene como vector normal $\overrightarrow{n}=(-1,\ 1,\ 0)$ y el plano mediatriz es de la forma $\alpha\equiv -x+y+D=0$ y como contiene al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\equiv -x+y+D=0 \\ M(0,\ 3,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow -0+3+D=0 \;\;;;\;\; D=-3 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha\equiv x-y+3=0}.$$

La recta r que determinan los planos π y α es $r\equiv\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$. El vértice (o vértices) del triángulo se encuentra en la recta r, por lo cual es $y=x+3$ y se sigue como se ha hecho anteriormente.

El área del triángulo (uno de ellos; es la misma) puede obtenerse de diversas formas, como por ejemplo la siguiente:

Los vectores de origen P que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-1,\ 4,\ 3)-(1,\ 2,\ 3)=(-2,\ 2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PR}=R-P=(-1,\ 2,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(-2,\ 0,\ -2)$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores que lo definen, o sea, la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores mencionados:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right\| = 2 \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\| = 2 \cdot \left| -i + k - j \right| = 2 \cdot \left| -i - j + k \right| =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2 \cdot \sqrt{1+1+1} = \underline{\underline{2\sqrt{3} \cong 3'46 \; u^2 = S_{PQR}}}$$

Otra forma de obtener el área es la siguiente: la altura de un triángulo equilátero es $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, que en el caso que nos ocupa es $h = \frac{\left(2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}}{2} = \underline{\sqrt{6} \; unidades = h}$.

$$S = \frac{Base \cdot Altura}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \cong \underline{\underline{3'46 \; u^2 = S}}$$, como cabía esperar.

****

2º) Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas $Ax=\overrightarrow{b}$ tiene al menos tres soluciones que son $x=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Explica porqué los coeficientes de la matriz A y del vector $\overrightarrow{b}$ han de ser de la forma $A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha & \alpha\\0 & -\beta & \beta\\0 & -\gamma & \gamma\end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$, donde $\alpha,\ \beta\ y\ \gamma$ son tres constantes cualquiera.

Supongamos ahora que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es también solución del sistema. ¿Cuánto pueden valer loas constantes $\alpha,\ \beta\ y\ \gamma$?

Un sistema de tres ecuaciones lineales representa a tres planos y cada una de las soluciones es un punto de la solución. Si el sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones que, según que estén alineados o no, representan una recta o un plano.

En este caso, considerando las soluciones dadas como las coordenadas de los puntos A(0, 1, 2), B(1, 2, 3) y C(0, 0, 1), que determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ 2,\ 3)-(0,\ 1,\ 2)=(1,\ 1,\ 1)$$
$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ 1)-(0,\ 1,\ 2)=(0,\ -1,\ -1)$$

Como puede apreciarse, son linealmente independientes, o sea, no están alineados, por lo cual determinan un plano π cuya ecuación general vectorial determinamos a continuación.

$$\pi\equiv\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}\ \Rightarrow\ \underline{\pi\equiv(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 2)+\lambda\cdot(1,\ 1,\ 1)+\mu\cdot(0,\ -1,\ -1)}$$

o también: $\underline{\pi\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1+\lambda-\mu\\z=2+\lambda-\mu\end{cases}}$.

Como el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales a 1, lo que se cumple con las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha & \alpha\\0 & -\beta & \beta\\0 & -\gamma & \gamma\end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix}0 & -\alpha & \alpha & \alpha\\0 & -\beta & \beta & \beta\\0 & -\gamma & \gamma & \gamma\end{pmatrix}$, <u>lo que explica lo pedido</u>.

Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es también solución del sistema, la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha & 1 \\ 0 & -\beta & \beta & 0 \\ 0 & -\gamma & \gamma & 0 \end{pmatrix}$ y para que tenga rango 1 tiene que cumplirse, necesariamente, que: $\underline{\underline{\alpha = \beta = \gamma = 0}}$.

****

Opción D

1º) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta las propiedades del producto de matrices, las dimensiones de la matriz X tienen que ser 3x2, o sea: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} a+2c+3e & b+2d+3f \\ a+4c+4e & b+4d+4f \\ -a-2e & -b-2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{cases} a+2c+3e=0 \\ a+4c+4e=0 \\ -a-2e=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \textit{Sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas} \\ \left.\begin{cases} b+2d+3f=0 \\ b+4d+4f=1 \\ -b-2f=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \textit{Sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema homogéneo de matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8-8+12+4=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 2 < n^{o}\ \ incógnitas \Rightarrow C.\ \ Indeterminado}$$

El sistema, además de la solución trivial a = c = e = 0, admite infinitos grupos de soluciones.

Despreciando, por ejemplo, la segunda ecuación y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo la e, resulta:

$$\left.\begin{matrix} a+2c+3e=0 \\ -a-2e=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{e=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a+2c=-3\lambda \\ \underline{a=-2\lambda} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2c=-3\lambda-a=-3\lambda+2\lambda=-\lambda \;;\; \underline{c=-\frac{1}{2}\lambda}$$

$$\underline{Solución: \begin{cases} a=-2\lambda \\ c=\frac{1}{2}\lambda \\ e=\lambda \end{cases} \forall \lambda \in R}$$

Para la resolución del sistema lineal no homogéneo tenemos en cuenta que la matriz de coeficientes es también M y la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Para determinar su rango consideramos en primer lugar las columnas C_1, C_2 y C_4:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-2-2=0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4-3+2-3=0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8+4-12=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incógnitas\ \ \Rightarrow\ \ Compatible\ \ Indeterminado}$$

Despreciando, por ejemplo, la segunda ecuación y parametrizando la variable f resulta:

$$\left. \begin{array}{l} b+2d+3f=0 \\ b+4d+4f=1 \\ \quad -b-2f=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f=\lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b+2d=-3\lambda \\ \underline{b=-1-2\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow 2d=-3\lambda+1+2\lambda=1-\lambda\ ;;\ \underline{d=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda}$$

$$\underline{Solución:\ \left\{ \begin{array}{l} b=-1-2\lambda \\ d=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ f=\lambda \end{array} \right\}\ \forall \lambda \in R}$$

La matriz pedida es: $\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} -2\lambda & -1-2\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}\ \forall \lambda \in R}}$

****

2º) Deduce una ecuación para el plano π que es perpendicular a $\pi_1 = x - 6y + z = 0$ y que contiene a la recta r intersección de $\pi_2 \equiv 4x - 2y + z = 2$ y $\pi_3 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$.

El plano $\pi_1 = x - 6y + z = 0$ tiene como vector normal a $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -6,\ 1)$, que es un vector director del plano pedido π.

La expresión general o implícita del plano $\pi_3 \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$ es la siguiente, teniendo en cuenta que sus vectores directores son $\overrightarrow{u} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 2)$, que contiene al punto P(2, 2, 1):

$$\pi_3(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-2) + (z-1) - (x-2) - 2(y-2) = 0\ ;;$$

$$(x-2) - 2(y-2) + (z-1) = 0\ ;;\ x - 2 - 2y + 4 + z - 1 = 0\ ;;\ \underline{\pi_3 \equiv x - 2y + z + 1 = 0}$$

La recta r expresada por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} 4x - 2y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$. La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$\underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 - \lambda \\ x - 2y = -1 - \lambda \end{cases} \left.\begin{matrix} 4x - 2y = 2 - \lambda \\ -x + 2y = 1 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 3\ ;;\ \underline{x = 1}\ ;;\ x - 2y = -1 - \lambda\ ;;$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 1 + \lambda) = \frac{1}{2}(1 + 1 + \lambda) = \frac{1}{2}(2 + \lambda) = \underline{1 + \frac{1}{2}\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de r son $Q(1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{w} = (0,\ 1,\ 2)$.

El plano π pedido, además de tener como vector director a $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -6,\ 1)$, también tiene como vector director al de la recta r, $\overrightarrow{w} = (0,\ 1,\ 2)$, y por contener a la recta r contiene a todos sus puntos, por consiguiente también a $Q(1,\ 1,\ 0)$, por lo que la ecuación general del plano pedido es:

$$\pi\left(Q;\ \overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;; \ \ -12(x-1)+(z-0)-(x-1)-2(y-1)=0 \ \ ;;$$

$$-13(x-1)-2(y-1)+(z-0)=0 \ \ ;; \ \ -13x+13-2y+2+z=0 \ \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 13x+2y-z-15=0}}$$

****