PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción de cada grupo de preguntas.

GRUPO 1

Opción A

1º) Prueba que la función $f(x)=x^2-2x+\cos x$ tiene al menos un mínimo relativo en el intervalo $(0,\ \pi)$.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que su derivada se anule para ese punto: $f'(x)=2x-2-sen\ x$

La función f’(x) es continua en todos los puntos del intervalo $[0,\ \pi]$ y derivable en todos los puntos del intervalo $(0,\ \pi)$, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que: “si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$”.

$$f'(x)=2x-2-sen\ x\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'(0)=-2-sen\ 0=-2-0=-2<0 \\ f'(\pi)=2\pi-2-sen\ \pi=2\pi-2-0=2(\pi-1)>0 \end{cases}$$

Lo anterior demuestra que la función f(x) tiene un extremo relativo en el intervalo $(0,\ \pi)$. Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo recurrimos a la segunda derivada: $si\ \ f''(x)<0\Rightarrow máximo\ \ y\ \ si\ \ f''(x)>0\Rightarrow mínimo$.

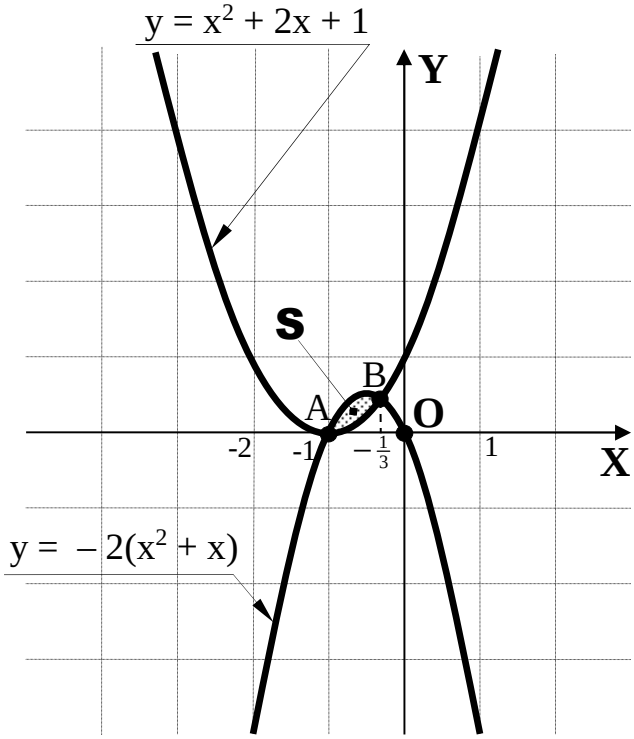
$$f''(x)=2-\cos x>0,\ \forall x\in R$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^2-2x+\cos x\ \ tiene\ \ un\ \ mínimo\ \ relativo\ \ en\ \ (0,\ \pi),\ \ c.q.d.}}$$

****

2º) Dibuja la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2 + 2x + 1$ *e* $y = -2(x^2 + x)$. Calcula también el área de dicha región.

Los puntos de corte de cada función con el eje de abscisas son:



$$y = x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \quad \rightarrow \quad (\textit{Mínimo})$$

$$y = -2(x^2 + x) = 0 \Rightarrow -2x(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de las dos parábolas se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$x^2 + 2x + 1 = -2x^2 - 2x \ ;; \ 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \frac{-2 \pm 1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow \underline{B\left(\frac{1}{3},\ \frac{16}{9}\right)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola $y = -2(x^2 + x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $y = x^2 + 2x + 1$ en el intervalo $\left(-1,\ -\frac{1}{3}\right)$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \left[-2(x^2 + x) - (x^2 + 2x + 1)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \left(-2x^2 - 2x - x^2 - 2x - 1\right) \cdot dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} \left(-3x^2 - 4x - 1\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-x^3 - 2x^2 - x\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}} = \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] - \left[-(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 1 + 2 - 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1 - 6 + 9}{27} = \underline{\underline{\frac{4}{27}\ u^2 = S}}$$

****

Opción B

1º) Calcula y expresa lo más simplificadamente posible la derivada de las siguientes funciones: $f(x)=L\,tag\ x$ y $g(x)=(\cos\ x)^{\cos\ x}$.

$$f(x)=L\,tag\ x=L\,u\ \ ;;\ \ f'(x)=\frac{u'}{u}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} u=tag\ x \\ u'=\dfrac{1}{\cos^2\ x}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2\ x}}{tag\ x}=\frac{\frac{1}{\cos^2\ x}}{\frac{sen\ x}{\cos\ x}}=\frac{\frac{1}{\cos\ x}}{sen\ x}=$$

$$=\frac{1}{sen\ x\cdot\cos\ x}=\frac{2}{2\cdot sen\ x\cdot\cos\ x}=\underline{\underline{\frac{2}{sen\ (2x)}=f'(x)}}$$

De otra forma:

$$f(x)=L\,tag\ x=L\frac{sen\ x}{\cos\ x}=L\ sen\ x-L\ \cos\ x$$

$$f'(x)=\frac{\cos\ x}{sen\ x}-\frac{-sen\ x}{\cos\ x}=\frac{\cos\ x}{sen\ x}+\frac{sen\ x}{\cos\ x}=\frac{\cos^2\ x+sen^2\ x}{sen\ x\cdot\cos\ x}=\frac{1}{sen\ x\cdot\cos\ x}=\frac{2}{2\cdot sen\ x\cdot\cos\ x}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{sen\ (2x)}=f'(x)}}$$

$$g(x)=(\cos\ x)^{\cos\ x}\ \Rightarrow\ L\,g(x)=L\ (\cos\ x)^{\cos\ x}=\cos\ x\cdot L\ \cos\ x$$

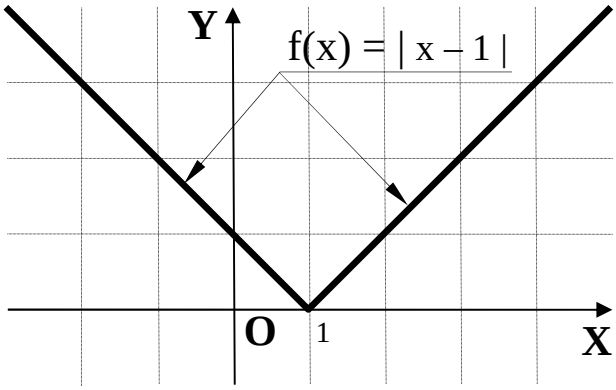
$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\cos\ x\cdot L\ \cos\ x+\cos\ x\cdot\frac{-sen\ x}{\cos\ x}=\cos\ x\cdot L\ \cos\ x-sen\ x\ \ ;;$$

$$g'(x)=g(x)\cdot(\cos\ x\cdot L\ \cos\ x-sen\ x)=\underline{\underline{(\cos\ x)^{\cos\ x}\cdot(\cos\ x\cdot L\ \cos\ x-sen\ x)=g'(x)}}$$

****

2º) Calcula la siguiente integral definida: $I=\int_{-1}^{2} x\cdot|1-x|\cdot dx$.

Teniendo en cuenta que la función $f(x)=|x-1|$ puede expresarse de la forma "definida a trozos" así: $f(x)=\begin{cases}1-x & si\ \ x<1\\ x-1 & si\ \ x>1\end{cases}$, como puede apreciarse en la representación gráfica de la función que se expresa en la figura adjunta.



Considerando también la siguiente propiedad de las integrales definidas:

$$\int_a^c f(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\cdot dx+\int_b^c f(x)\cdot dx,$$

siempre que se cumpla que a < b < c, la integral pedida puede resolverse como se hace a continuación:

$$I=\int_{-1}^{2} x\cdot|1-x|\cdot dx=\int_{-1}^{1} x\cdot(1-x)\cdot dx+\int_{1}^{2} x\cdot(x-1)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\left(x-x^2\right)\cdot dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-x\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}=\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left[\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-1+\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}=-3+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}=\frac{-18+16+3}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{6}\ u^2=I}}$$

****

Opción C

1º) Sea C un cuadrado, cuyos lados tienen longitud 3, tal que:

Uno de sus vértices es el punto A(1, 1, 1) y otro de ellos, B, esta en el plano de ecuación $\pi_1 \equiv x - y - z = 0$.

Uno de sus lados está contenido en la recta r intersección de los planos de ecuaciones $\pi_2 \equiv x + z = 2$ y $\pi_3 \equiv x + 4y - z = 4$.

Encuentra los otros tres vértices que permitan construir el cuadrado C cumpliendo las condiciones anteriores.

Una de las diferentes formas de resolver el ejercicio es la siguiente.

La recta r expresada por dos ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} x + 4y - z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$, que contiene al punto A(1, 1, 1) por satisfacer ambas ecuaciones.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es así:

$$r \equiv \begin{cases} x + 4y - z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;; \; \underline{x = 2 - \lambda} \;;; \; 4y = 4 + \lambda - x = 4 + \lambda - 2 + \lambda = 2 + 2\lambda \;;;$$

$$\underline{y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto genérico de r es de la forma $D\left(2 - \lambda,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda,\ \lambda\right)$.

Teniendo en cuenta que $\overline{AD} = 3$:

$$\overline{AD} = P - A = \left(2 - \lambda,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda,\ \lambda\right) - (1,\ 1,\ 1) = \left(1 - \lambda,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda,\ -1 + \lambda\right).$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(1-\lambda)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\right)^2 + (-1+\lambda)^2} = 3 \;;; \; 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{\lambda^2}{4} + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 9 \;;;$$

$$-4\lambda + 2\lambda^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 7 \;;; \; -16\lambda + 8\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 28 \;;; \; 9\lambda^2 - 18\lambda - 27 = 0 \;;;$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \;;;\; \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 3 \;\rightarrow\; \underline{D_1(-1,\ 2,\ 3)} \\ \lambda_2 = -1 \;\rightarrow\; \underline{D_2(3,\ 0,\ -1)} \end{cases}$$

Considerando, por ejemplo, el punto D_1(-1, 2, 3) y teniendo en cuenta que los puntos pertenecientes al plano $\pi_1 \equiv x - y - z = 0$ son de la forma $B(x,\ x-z,\ z)$, la distancia entre los puntos B y A es el lado, o sea, 3 unidades y la distancia entre B y D_1, que es la diagonal del cuadrado, tiene que ser $\overline{BD_1} = d = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$.

$$\overline{AB} = 3 = \sqrt{(x-1)^2 + (x-z-1)^2 + (z-1)^2} \;;;$$

$$9 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + z^2 + 1 - 2xz - 2x + 2z + z^2 - 2z + 1 \;;;\; 2x^2 + 2z^2 - 4x - 2xz - 6 = 0 \;;;$$

$$\underline{x^2 + z^2 - 2x - xz - 3 = 0} \qquad (1)$$

$$\overline{BD_1} = \sqrt{18} = \sqrt{(x+1)^2 + (x-z-2)^2 + (z-3)^2} \;;;$$

$$18 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + z^2 + 4 - 2xz - 4x + 4z + z^2 - 6z + 9 \;;;\; 2x^2 + 2z^2 - 2x - 2z - 2xz - 4 = 0 \;;;$$

$$\underline{x^2 + z^2 - x - z - xz - 2 = 0} \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce:

$$x^2 + z^2 - 2x - xz - 3 = x^2 + z^2 - x - z - xz - 2 \;;;\; -2x - 3 = -x - z - 2 \;;;\; \underline{z = x + 1}$$

Sustituyendo el valor obtenido de z en la expresión (1):

$$x^2 + (x+1)^2 - 2x - x(x+1) - 3 = 0 \;;;\; x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x - x^2 - x - 3 = 0 \;;;\; \underline{x^2 - x - 2 = 0}$$

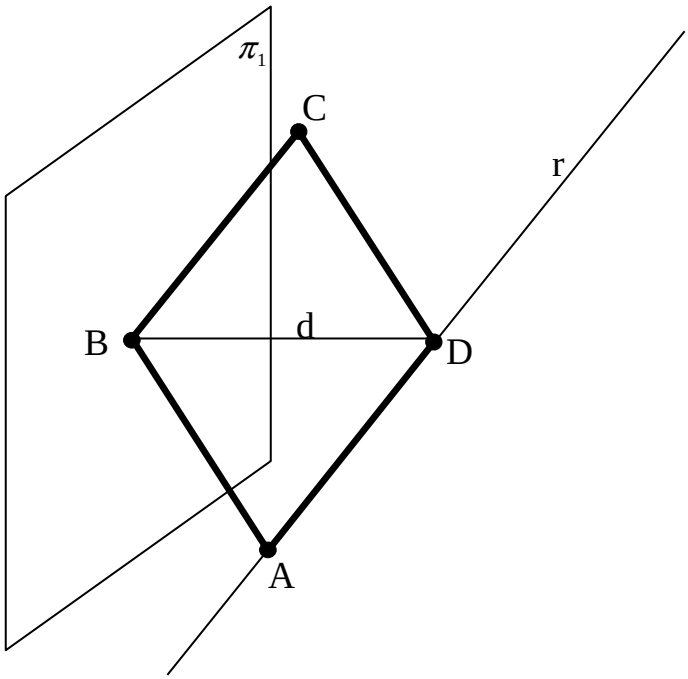
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 2 \;\rightarrow\; z_1 = 3 \;\rightarrow\; y_1 = x_1 - z_1 = -1 \;\Rightarrow\; \underline{B_1(2,\ -1,\ 3)} \\ x_2 = -1 \;\rightarrow\; z_2 = 0 \;\rightarrow\; y_2 = x_2 - z_2 = -1 \;\Rightarrow\; \underline{B_2(-1,\ -1,\ 0)} \end{cases}$$

Considerando los tres vértices del cuadrado A(1, 1, 1), B_1(2, -1, 3) y D_1(-1, 2, 3), el cuarto vértice puede obtenerse de forma vectorial teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{B_1C}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_1} = D_1 - A = (-1,\ 2,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ 1,\ 2) \\ \overrightarrow{B_1C} = C - B_1 = (x,\ y,\ z) - (2,\ -1,\ 3) = (x-2,\ y+1,\ z-3) \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,\ 1,\ 2) = (x-2,\ y+1,\ z-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2=-2 \;\rightarrow\; \underline{x=0} \\ y+1=1 \;\rightarrow\; \underline{y=0} \\ z-3=2 \;\rightarrow\; \underline{z=5} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{C(0,\ 0,\ 5)}$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



$$\underline{\underline{Solución:\ A(1,\ 1,\ 1),\ \ B(2,\ -1,\ 3),\ \ C(0,\ 0,\ 5)\ \ y\ \ D(-1,\ 2,\ 3)}}$$

****

2º) Encuentra el valor, o valores, del parámetro α que hacen que el siguiente sistema matricial: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea incompatible.

El sistema lineal resultante es $\left.\begin{array}{r} -2y+\alpha z=1 \\ x-\alpha y+z=2 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ y las matrices de coeficientes y ampliadas son las siguientes: $M=\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea incompatible, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices M y M' tienen que ser diferentes.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & -2 & \alpha \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\alpha-2+\alpha^2=0 \;;;\; \alpha^2+\alpha-2=0$$

$$\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_1=1} \;;;\; \underline{\alpha_2=-2}$$

Para $\alpha=1$ resulta $M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\}=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-4+1+2=0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2-1-1=0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2+2-1+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

Para $\alpha=-2$ resulta $M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$Rango\ \ M' \ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-4-2+2=-3 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{Para\ \ \alpha=-2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3\ \Rightarrow\ Sistema\ \ Incompatible}$$

$$\underline{\underline{El\ \ único\ \ valor\ \ que\ \ cumple\ \ lo\ \ pedido\ \ es\ \ \alpha=-2}}$$

****

Opción D

1º) Supongamos que la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 3 & 2 & c\end{pmatrix}$ es inversible. Prueba que la solución del sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ verifica que $x_3=0$.

Multiplicando por la izquierda por la inversa de A, resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\quad ;;\quad I\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\quad ;;\quad \underline{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}}\qquad (*)$$

La inversa de A, en función de a, b y c, es la siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 0 & 1 & b\\ 3 & 2 & c\end{vmatrix}=c+6b-3a-2b=-3a+4b+c=|A|\quad ;;\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ a & b & c\end{pmatrix}$$

$$Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ b & c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ a & c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ a & b\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 3\\ b & c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ a & c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & b\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-2b & 2a-2c & 2b-a\\ 3b & c-3a & -b\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \underline{A^{-1}=\frac{1}{-3a+4b+c}\cdot\begin{pmatrix}c-2b & 2a-2c & 2b-a\\ 3b & c-3a & -b\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}}\qquad Sustituyendo\ \ en\ \ (*):$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{-3a+4b+c}\begin{pmatrix}c-2b & 2a-2c & 2b-a\\ 3b & c-3a & -b\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{-3a+4b+c}\begin{pmatrix}c-2b+2a-2c-2b+a\\ 3b+c-3a+b\\ -3+4-1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-3a+4b+c}\begin{pmatrix}3a-4b-c\\ -3a+4b+c\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x_3=0,\ \ c.d.j.}}\qquad (como\ \ debíamos\ \ verificar)$$

****

2º) Estudia, en función del parámetro m, la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x - y + z = 0,\ \ \pi_2 \equiv 3x - 2y + z = 2\ \ y\ \ \pi_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = m\lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$.

La expresión del plano $\pi_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = m\lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$ en forma general es como sigue:

Contiene al punto P(1, 0, -1) y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1,\ m,\ 1)$ y $\vec{v} = (0,\ 1,\ 2)$.

$$\pi_3\left(P;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 2m(x-1) + (z+1) - (x-1) - 2y = 0\ \ ;;$$

$$2mx - 2m + z + 1 - x + 1 - 2y = 0\ \ ;;\ \ \underline{\pi_3 \equiv (2m-1)x - 2y + z + (2-2m) = 0}$$

El sistema formado por los tres planos es: $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z - 2 = 0 \\ (2m-1)x - 2y + z + (2-2m) = 0 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2m-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\ \ y\ \ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2m-1 & -2 & 1 & 2-2m \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2m-1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 6 - 2m + 1 + 4m - 2 + 2 + 3 = 2m - 4 = 2(m-2) = 0\ \ ;;\ \ \underline{m = 2}$$

$$\underline{Para\ \ m \neq 2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^o\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Determinado}$$

Para m = 2 el sistema resulta $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z - 2 = 0 \\ 3x - 2y + z - 2 = 0 \end{array}\right\}$ donde se aprecia que los planos segundo y tercero son coincidentes.

$$\underline{\underline{Para \quad m \neq 2 \quad los \quad tres \quad planos \quad son \quad sexantes \quad y \quad se \quad cortan \quad en \quad un \quad punto.}}$$

$$\underline{\underline{Para \quad m = 2 \quad los \quad planos \quad \pi_2 \quad y \quad \pi_3 \quad son \quad coincidentes \quad y \quad secantes \quad a \quad \pi_1.}}$$

****