PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2004

(RESUELTOS) por Antonio Menguiano.

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

Grupo 1

Opción A

1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+ay+3z=1 \\ x-y+(2-a)z=a \end{cases}$.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -1 & 2-a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2-a & a \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -1 & 2-a \end{vmatrix}=a(2-a)-2+3-2a+3-(2-a)=2a-a^2+4-2a-2+a=$$

$$-a^2+a+2=0 \;;;\; a^2-a-2=0 \;;;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=2} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 2 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\,M = Rango\,M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow El\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1+1-2=4\neq 0 \Rightarrow Rango\ M'=3$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ Rango\,M\neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1\ \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ El\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$$

$$M'\Rightarrow\{C_1,\,C_2,\,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=1+1+1+1=4\neq 0\Rightarrow Rango\ \ M'=3$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1\ \Rightarrow\ Rango\,M\neq Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

Resolviendo para $\left\{\begin{matrix}a\neq 2\\ a\neq -1\end{matrix}\right\}$, aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & a & 3\\ a & -1 & 2-a\end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{-2a+3a-2a^2-(2-a)}{(a-2)(a+1)}=\frac{-2a^2+2a-2}{(a-2)(a+1)}=\underline{\underline{\frac{-2(a^2-a+1)}{(a-2)(a+1)}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & a & 2-a\end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{2-a+2a-2-3a}{(a-2)(a+1)}=\underline{\underline{\frac{-2a}{(a-2)(a+1)}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & a & 1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)}=\frac{a^2+1+1-a}{(a-2)(a+1)}=\underline{\underline{\frac{a^2-a+2}{(a-2)(a+1)}=z}}$$

****

2º) Hallar el ángulo que forma la recta $r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - 3 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + y - z = 0 \end{cases}$ con el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + y + z + 4 = 0$.

El ángulo que forma la recta r con el plano π es el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el vector normal de π.

Para determinar un vector director de la recta r la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \underline{y = 3 - \lambda} \;;;\; z = 3x + y = 3\lambda - 3 + \lambda \;;;\; \underline{z = -3 + 4\lambda}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{cases}}$$ Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 4)$.

Un vector normal del plano π *es* $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ 1)$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(1,\ -1,\ 4) \cdot (2,\ 1,\ 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2 - 1 + 4}{\sqrt{1 + 1 + 16} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{108}} = 0'4811 \;\Rightarrow\; \underline{\beta = 61^\circ\ 14'\ 28''} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 61^\circ\ 14'\ 28'' = \underline{\underline{28^\circ\ 45'\ 32''}} = \alpha$$

<u>*La recta r y el plano π forman un ángulo de* $28^\circ\ 45'\ 32''$</u>

****

Opción B

1º) Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 1 = 4 - 3 = \underline{1 = |A|} \;\;;;\;\; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}}}$$

De otra forma, vamos a determinar A^{-1} utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_1 - 2F_2 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 + 3F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

2º) Encontrar la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 4 \\ \pi_2 \equiv x - y - z = 0 \end{cases}$.

El plano π pedido puede determinarse teniendo en cuenta que tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene un punto de r.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{u} = (0,\ 1,\ 1)$ y un punto de r es A(1, 1, 2).

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 2x + y = 4 - 2\lambda \\ x - y = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 4 - 2\lambda \ \ ;; \ \ \underline{x = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\lambda} \ \ ;;$$

$$x - y = \lambda \ \ ;; \ \ y = x - \lambda = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\lambda - \lambda = \underline{\frac{4}{3} - \frac{5}{2}\lambda = y}$$

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\lambda \\ y = \frac{4}{3} - \frac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de s es $\overrightarrow{v} = (3,\ 5,\ -2)$.

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;; \ \ -2(x-1) + 3(y-1) - 3(z-2) - 5(x-1) = 0 \ \ ;;$$

$$-7(x-1) + 3(y-1) - 3(z-2) = 0 \ \ ;; \ \ -7x + 7 + 3y - 3 - 3z + 6 = 0 \ \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x - 3y + 3z - 10 = 0}}$$

****

Grupo 2

Opción C

1º) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;; $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x}{1-\cos\ x}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+1} = \frac{2}{1+1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x}{1-\cos\ x} = \frac{0 \cdot sen\ 0}{1-\cos\ 0} = \frac{0 \cdot 0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x \cdot (1+\cos\ x)}{(1-\cos\ x)(1+\cos\ x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x \cdot (1+\cos\ x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x \cdot (1+\cos\ x)}{sen^2\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (1+\cos\ x)}{sen\ x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} (1+\cos\ x) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{sen\ x} = (1+1) \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

De otra forma, aplicando la Regla de L´Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot sen\ x}{1-\cos\ x} = \frac{0 \cdot sen\ 0}{1-\cos\ 0} = \frac{0 \cdot 0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos\ x}{sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x + x \cdot \cos\ x}{sen\ x} = \frac{0+0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos\ x + 1 \cdot \cos\ x - x \cdot sen\ x}{\cos\ x} = \frac{1+1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{1} = \frac{1+1-0}{1} = \underline{\underline{2}}$$

****

2º) Demostrar que la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1,\ 1)$ y tiene un máximo relativo en ese intervalo.

La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ es continua en su dominio que es R, por ser la suma algebraica de tres funciones continuas en sus respectivos dominios, que en los tres casos es R, por lo tanto, f(x) es continua en (-1, 1).

Aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo dado se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2 + 2\cdot(-1) - e^{-1} = 2 - 2 - \dfrac{1}{e} = -\dfrac{1}{e} < 0 \\ \\ f(1) = 2 + 2\cdot 1 - e^{1} = 2 + 2 - e = 4 - e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\exists x \in R,\ \ f(x) = 0,\ -1 < x < 1,}}\quad \underline{\underline{c.q.d.}}$$

$$f'(x) = 2 - e^x \ \ ;;\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow 2 = e^x \ \ ;;\ \ \underline{x = L2}$$

$$f''(x) = -e^x \ \ ;;\ \ f''(L2) = e^{L2} > 0 \ \Rightarrow\ Máximo$$

$$f(L2) = 2 + 2\cdot L2 - e^{L2} = 2 + L4 - 2 = L4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Máximo: (L2,\ L4)}}$$

La abscisa del máximo pertenece al intervalo (-1, 1), por ser L2 = 0’693, y entonces: $\underline{\underline{-1 < L2 < 1}}$

****

Opción D

1º) Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplificar el resultado: $y = L\left(sen\ x^2\right)$;; $y = x^{L\,x}$.

$$y = L\left(sen\ x^2\right) \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \cos\ x^2}{sen\ x^2} = \underline{\underline{2x \cdot \cot ag\ x^2 = y'}}$$

$$y = x^{L\,x} \quad \Rightarrow \quad L\,y = L\,x \cdot L\,x = \left(L\,x\right)^2 \ ;;$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot L\,x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot L\,x \ ;; \ \underline{\underline{y' = \frac{2 \cdot x^{L\,x}}{x} \cdot L\,x}}$$

****

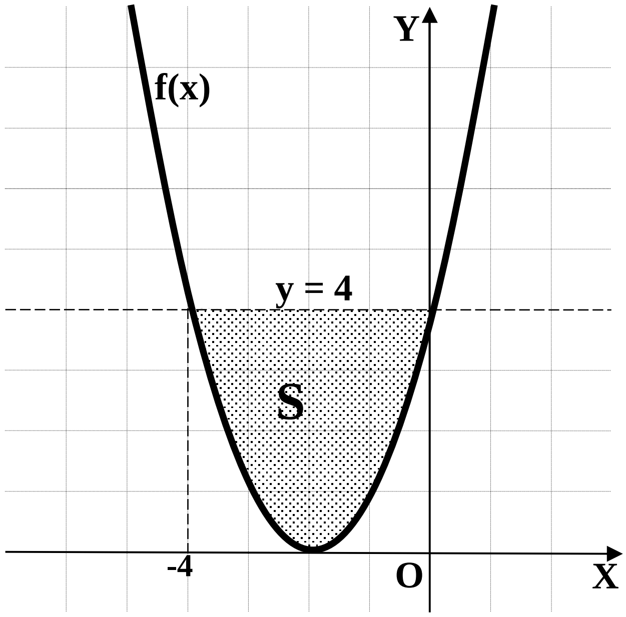
2º) Hallar el área encerrada por las gráficas de la curva $y = x^2 + 4x + 4$ y la recta y = 4.

$y = x^2 + 4x + 4$;; $y' = 2x + 4$;; $y' = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0$;; $x + 2 = 0$;; $\underline{x = -2}$

$y'' = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$y_{(-2)} = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo(-2,\ 0)}$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{0} [4 - f(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{0} [4 - (x^2 + 4x + 4)] \cdot dx = \int_{-4}^{0} (4 - x^2 - 4x - 4) \cdot dx = \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-4}^{0} = 0 - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 2 \cdot (-4)^2 \right] = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64 + 96}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2 = S}}$$

****