

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****SEPTIEMBRE - 2004**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

Grupo 1**Opción A**

1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a - 1 \\ x + (a + 1)y + (2a + 1)z = a \\ -x - 2y + z = 2 - a \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a-1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 & a \\ -1 & -2 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

El rango de M es, en función de a , el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a + 1 - 2a - 2(2a + 1) + a(a + 1) - 2 + 2(2a + 1) =$$

$$= -a - 1 + a^2 + a = a^2 - 1 = 0 ; ; \underline{a_1 = 1} ; ; \underline{a_2 = -1}$$

Para $\begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter minado}$

Veamos que ocurre con el rango de M' para los valores de a que hacen que el rango de M sea dos:

$$\text{Para } a=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = 2C_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}$$

Para $a=1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

$$\text{Para } a=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -C_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 3}$$

Para $a=-1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

Resolvemos en los casos de compatibilidad:

1º) En el caso de ser $a \neq 1$ y $a \neq -1$ aplicamos la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 2 & a \\ a & a+1 & 2a+1 \\ 2-a & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{a^2 - 1 - 2a^2 + 2(2-a)(2a+1) - a(a+1)(2-a) + 2(a-1)(2a+1) - 2a}{a^2 - 1} =$$

$$= \frac{-a^2 - 2a - 1 + 2(4a + 2 - 2a^2 - a) - a(2a - a^2 + 2 - a) + 2(2a^2 + a - 2a - 1)}{a^2 - 1} =$$

$$x = \frac{-a^2 - 2a - 1 + 6a + 4 - 4a^2 - a^2 + a^3 - 2a + 4a^2 - 2a - 2}{a^2 - 1} = \frac{a^3 - 2a^2 + 1}{a^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{El numerador se descompone por Ruffini}) \Rightarrow \frac{(a-1)(a^2 - a - 1)}{(a+1)(a-1)} = \underline{\underline{\frac{a^2 - a - 1}{a+1} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & a \\ 1 & a & 2a+1 \\ -1 & 2-a & 1 \end{vmatrix}}{a^2-1} = \frac{a+a(2-a)-(a-1)(2a+1)+a^2-(a-1)-(2-a)(2a+1)}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a^2+a+2a-a^2-(2a^2+a-2a-1)-a+1-(4a+2-2a^2-a)}{a^2-1} =$$

$$= \frac{2a+1-2a^2+a+1-3a-2+2a^2}{a^2-1} = \frac{0}{a^2-1} = \underline{\underline{0}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ 1 & a+1 & a \\ -1 & -2 & 2-a \end{vmatrix}}{a^2-1} = \frac{(a+1)(2-a)-2(a-1)-2a+(a+1)(a-1)+2a-2(2-a)}{a^2-1} =$$

$$= \frac{2a-a^2+2-a-2a+2+a^2-1-4+2a}{a^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{a+1}}} = z$$

2º) Resolvemos en el caso de $a = 1$, que resulta el sistema compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x+2y+az = a-1 \\ x+(a+1)y+(2a+1)z = a \\ -x-2y+z = 2-a \end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z = 0 \\ x+2y+3z = 1 \\ -x-2y+z = 1 \end{cases}$$

Despreciando la primera ecuación y parametrizando la variable $y = \lambda$:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 1 \\ -x-2y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \quad ; \quad \underline{z = \frac{1}{2}} \quad ; \quad \underline{x = 1 - 2\lambda - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 2\lambda = x}$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}}$$

2º) Calcular el valor de b para que el plano $\pi \equiv bx + y - z = 3$ sea perpendicular a la recta r, intersección de los planos $\pi_1 \equiv y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 0$. Hallar el punto de intersección de r y π .

La expresión por unas ecuaciones cartesianas de r es: $r \equiv \begin{cases} y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ y por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ; \ ; \ ; \ \underline{y = 1 - \lambda} \ ; \ ; \ ; \ x = 1 - \lambda - \lambda = \underline{1 - 2\lambda = x} \Rightarrow r \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (-2, -1, 1)$.

Para que la recta r sea perpendicular al plano π , el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que ser linealmente dependientes (paralelos).

El vector normal del plano es $\vec{n} = (b, 1, -1)$.

Tiene que cumplirse que: $\vec{n} = k \cdot \vec{v} \ ; \ ; \ ; \ \frac{\vec{n}}{\vec{v}} = k \Rightarrow \frac{b}{-2} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{b = 2}}$

El punto de intersección de r con π se obtiene de la siguiente manera:

Los puntos genéricos de r son de la forma $P(1 - 2\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$.

Si el punto P pertenece al plano tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - z = 3 \\ P(1 - 2\lambda, 1 - \lambda, \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 - 2\lambda) + 1 - \lambda - \lambda = 3 \ ; \ ; \ ; \ 2 - 4\lambda - 2\lambda = 2 \ ; \ ; \ ; \ -6\lambda = 0 \ ; \ ; \ ; \ \underline{\underline{\lambda = 0}}$$

$$\underline{\underline{P(1, 1, 0)}}$$

Opción B

1º) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, hallar el determinante de la matriz P, producto de $A \cdot B$.

$$P = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+0 & -3-2+0 & 9+34-1 \\ -0+1+0 & -0-1+0 & 0+17-1 \\ -4+1+0 & -6-1+0 & 18+17-0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 42 \\ 1 & -1 & 16 \\ -3 & -7 & 35 \end{pmatrix} = P$$

$$|P| = |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 42 \\ 1 & -1 & 16 \\ -3 & -7 & 35 \end{vmatrix} = -7 \cdot 42 + 3 \cdot 80 - 3 \cdot 42 + 5 \cdot 35 = -420 + 240 + 175 =$$

$$= 415 - 420 = \underline{\underline{-5}} = |A \cdot B|$$

2º) Encontrar la ecuación continua de la recta r que es perpendicular a las siguientes rectas: $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1)$.

Los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 son $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$, respectivamente.

La recta r perpendicular común a las dos rectas dadas tiene como vector director un vector que es, al mismo tiempo, perpendicular a las dos rectas; su vector director puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2k - k - 2j = i - 2j + k = \underline{(1, -2, 1)} = \vec{w}$$

Existen infinitas rectas perpendiculares al mismo tiempo a las rectas r_1 y r_2 , pero entendemos como perpendicular común aquella que, además de ser perpendicular, se apoya en ambas. Para calcularla determinamos un vector que tenga como origen un punto P de r_1 y como extremo un punto Q de r_2 , que sea linealmente dependiente de \vec{w} .

Un punto genérico de cada una de las rectas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{P(1 + 2\lambda, 2\lambda, 2 + 2\lambda)} \quad ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{Q(\lambda, \lambda, 1 + \lambda)}$$

El vector $\vec{PQ} = Q - P = (\lambda, \lambda, 1 + \lambda) - (1 + 2\lambda, 2\lambda, 2 + 2\lambda) = (-1 - \lambda, -\lambda, -1 - \lambda)$ tiene que ser paralelo a \vec{w} , sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-1 - \lambda}{1} = \frac{-\lambda}{-2} = \frac{-1 - \lambda}{1} \Rightarrow -\lambda = 2 + 2\lambda \quad ; \quad 3\lambda = -2 \quad ; \quad \underline{\lambda = -\frac{2}{3}}$$

Los puntos de cada una de las rectas son:

$$P \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)} \quad Q \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{Q\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

La recta pedida r es la que pasa por P y Q:

El vector director de r puede ser cualquier vector linealmente dependiente de $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, p. e. $\overrightarrow{v_r} = (1, -2, 1)$.

Como punto puede tomarse, por ejemplo, $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

La expresión en unas ecuaciones continuas de r es:

$$r \equiv \frac{x + \frac{1}{3}}{1} = \frac{y + \frac{4}{3}}{-2} = \frac{z - \frac{2}{3}}{1} \quad ;; \quad \frac{3x + 1}{3} = \frac{3y + 4}{-6} = \frac{3z - 2}{3} \quad \text{Simplificando:}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{3x + 1}{1} = \frac{3y + 4}{-2} = \frac{3z - 2}{1}}}$$

Grupo 2

Opción C

1º) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^x$; ; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^x = 1^\infty \Rightarrow \text{Indeterminación con } e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1+2}{3x-1} \right)^x =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x$$

A partir de aquí, vamos a resolver el ejercicio de dos formas diferentes:

Primera :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3x-1} = \frac{1}{n} \\ 3x-1 = 2n \\ x = \frac{2n+1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{e^2}}}$$

Segunda :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{x \cdot \frac{3x-1}{2} \cdot \frac{2}{3x-1}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{\frac{3x-1}{2} \cdot \frac{2x}{3x-1}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{\frac{3x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{e^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \infty - \infty \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{-\infty}} \quad (\text{Grado del numerador} > \text{grado denominador})$$

2º) Hallar el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la función

$$f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cos x = 0 \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{3} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow \begin{cases} f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo}} \\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx.}\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}\right)}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín.}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$$f''(x) = 2 \operatorname{sen} x \quad ; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 0 \quad ; \quad \underline{x = 0} \rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2 \cos x \quad ; \quad f'''(0) = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Punto de inflexión}}$$

$$f(0) = 0 - 2 \cdot \operatorname{sen} 0 = -2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.} \Rightarrow O(0, 0)}}$$

Opción D

1º) Demostrar que la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ tiene un máximo relativo para $x = \frac{\pi}{2}$.

Una función continua tiene un máximo relativo en un punto cuando la derivada primera se anula en dicho punto y la segunda derivada es negativa para el mismo punto.

$$f'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \quad ; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} = 0 \quad ; ; \quad \cos x = 0 \quad ; ; \quad \underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

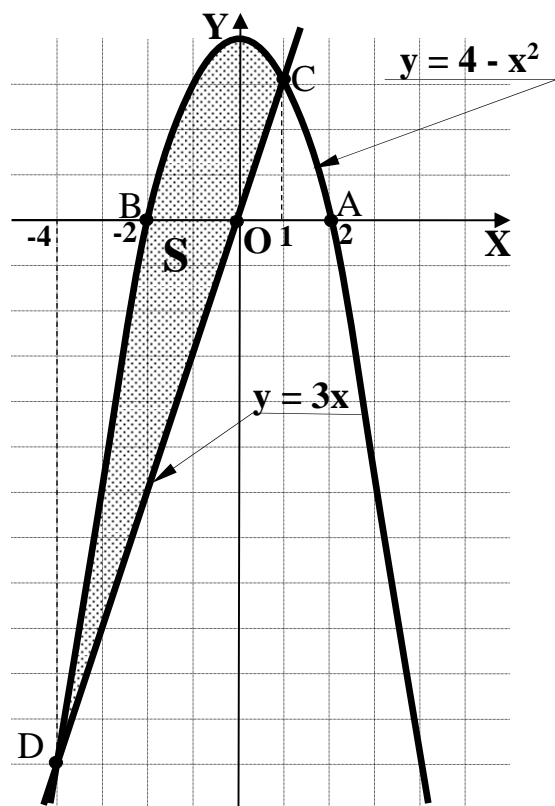
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos x \cdot (\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}) = \underline{e^{\operatorname{sen} x} \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) = f''(x)}$$

$$f'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \quad ; ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} = 0 \quad ; ; \quad \cos x = 0 \quad ; ; \quad \underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = e^1 \cdot (0^2 - 1) = -e < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para } \frac{\pi}{2}, \text{ c.q.d.}}}$$

2º) Calcular el área de la región encerrada entre las gráficas de la curva $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3x$.

Los puntos de corte de cada función con el eje de abscisas son:



$$y = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2, 0)} \end{cases}$$

$$y = 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)}$$

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen igualándolas:

$$4 - x^2 = 3x \quad ; \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \underline{C(1, 3)} \\ x_2 = -4 \rightarrow \underline{D(-4, -12)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola mayores que las de la recta en el intervalo $(-4, 1)$, la superficie es la diferencia de las limitadas por la parábola y la recta, respectivamente, o sea:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 [(4 - x^2) - 3x] \cdot dx = \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(+\frac{64}{3} - \frac{48}{2} - 16 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 24 + 16 = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \\ &= \frac{264 - 130 - 9}{6} = \frac{264 - 139}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6} u^2 = S}} \end{aligned}$$
