PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una pregunta de cada una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y+az=7 \\ x+3y+(a^2+a-1)z=2a+3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & a^2+a-1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & a & 7 \\ 1 & 3 & a^2+a-1 & 2a+3 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & a^2+a-1 \end{vmatrix}=4(a^2+a-1)+a-3a-2(a^2+a-1)=0 \;;;\; 2(a^2+a-1)-2a=0$$

$$2a^2+2a-2-2a=0 \;;;\; 2a^2-2=0 \;;;\; 2(a^2-1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=1} \;;;\; \underline{a_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Deter\min ado}}$$

$$Para\ \ a=1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\2&4&1&7\\1&3&1&5\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \{C_4=C_1+C_2+C_3\}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1\Rightarrow Rango\ M\ =Rango\ M'=2<n^{o}\ \ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=-1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\2&4&-1&7\\1&3&-1&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Veámos\ \ cual\ \ es\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M':$$

$$\Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&7\\1&3&1\end{vmatrix}=4+12+7-8-21-2=-8\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1\Rightarrow Rango\ M\ =2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

En primer lugar resolvemos para el caso de compatible determinado, para los valores reales de x distintos de 1 y -1, aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&0\\7&4&a\\2a+3&3&a^2+a-1\end{vmatrix}}{2(a+1)(a-1)}=\frac{8(a^2+a-1)+a(2a+3)-6a-7(a^2+a-1)}{2(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+a-1+2a^2+3a-6a}{2(a+1)(a-1)}=\frac{3a^2-2a-1}{2(a+1)(a-1)}=\frac{(a-1)(3a+1)}{2(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{3a+1}{2(a+1)}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\2&7&a\\1&2a+3&a^2+a-1\end{vmatrix}}{2(a+1)(a-1)}=\frac{7(a^2+a-1)+2a-a(2a+3)-4(a^2+a-1)}{2(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{3(a^2+a-1)+2a-2a^2-3a}{2(a+1)(a-1)}=\frac{a^2+2a-3}{2(a+1)(a-1)}=\frac{(a-1)(a+3)}{2(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a+3}{2(a+1)}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&7\\1&3&2a+3\end{vmatrix}}{2(a+1)(a-1)}=\frac{8a+12+12+7-8-21-4a-6}{2(a+1)(a-1)}=\frac{4a-4}{2(a+1)(a-1)}=\frac{4(a-1)}{2(a+1)(a-1)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2}{a+1}=z}}$$

Resolvemos ahora el caso de compatible indeterminado, que resulta para a = 1, en cuyo caso resulta el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y+z=7 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$; despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando la variable z:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x-y=-2 \\ x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y=3-\lambda \;;;\; \underline{y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda}$$

$$x+y=2 \;;;\; x=1-y=2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda \;;;\; \underline{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Encuentra los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Una de las varias formas de resolver este problema es la siguiente:

El haz de planos paralelos que determina el plano π tienen una ecuación genérica de la forma $\psi \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

La distancia entre dos planos paralelos es: $d(\pi,\ \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Los dos planos del haz ψ que distan 1 del plano π son los siguientes:

$$d(\psi,\ \pi) = \frac{|D-(-5)|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{|D+5|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|D+5|}{\sqrt{9}} = \frac{|D+5|}{3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} D+5=3 \rightarrow \underline{D_1 = -2} \\ -D-5=3 \rightarrow \underline{D_2 = -8} \end{cases}$$

Los planos son $\pi_1 \equiv 2x + 2y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + 2y + z - 8 = 0$.

Los puntos pedidos son las intersecciones de la recta r con los planos π_1 y π_2. Teniendo en cuenta que la recta r en unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$, los puntos son:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ \pi_1 \equiv 2x + 2y + z - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+\lambda) + 2(1+\lambda) + (-2\lambda) - 2 = 0 \ ;;$$

$$4 + 2\lambda + 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 = 0 \ ;;\ 2\lambda + 4 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = -2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_1(0,\ -1,\ 4)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ \pi_2 \equiv 2x + 2y + z - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+\lambda) + 2(1+\lambda) + (-2\lambda) - 8 = 0 \ ;;$$

$$4 + 2\lambda + 2 + 2\lambda - 2\lambda - 8 = 0 \ ;;\ 2\lambda - 2 = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = 1} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P_2(3,\ 2,\ -2)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Razona por qué es $|B\cdot A|=0$ para cualquier valor B de tamaño 3 x 2. Encuentra una matriz B de tamaño 3 x 2 que cumpla que $|A\cdot B|=1$.

Sea la matriz real de dimensión 3 x 2: $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}$. El producto B · A es:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+0 & 0+b & 0+2b\\ c+0 & 0+d & 0+2d\\ e+0 & 0+f & 0+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & 2b\\ c & d & 2d\\ e & f & 2f\end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz producto anterior es $\begin{vmatrix}a & b & 2b\\ c & d & 2d\\ e & f & 2f\end{vmatrix}$, cuyo valor es cero por ser proporcionales las columnas segunda y tercera, por consiguiente: para cualquier matriz real B de dimensión 3 x 2 se cumple que $\underline{\underline{|B\cdot A|=0,\ c.q.d.}}$

Sea la matriz anterior $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+0+0 & b+0+0\\ 0+c+2e & 0+d+2f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c+2e & d+2f\end{bmatrix}.$$

Para que se cumpla que $|A\cdot B|=1$ tiene que ser $\begin{vmatrix}a & b\\ c+2e & d+2f\end{vmatrix}=1\ \Rightarrow.$

$\Rightarrow\ a(d+2f)-b(c+2e)=1\ ;;\ ad+2af-bc-2be=1\ \Rightarrow\ Haciendo,\ p.\ e.:\ \underline{a=e=0}\ \Rightarrow$

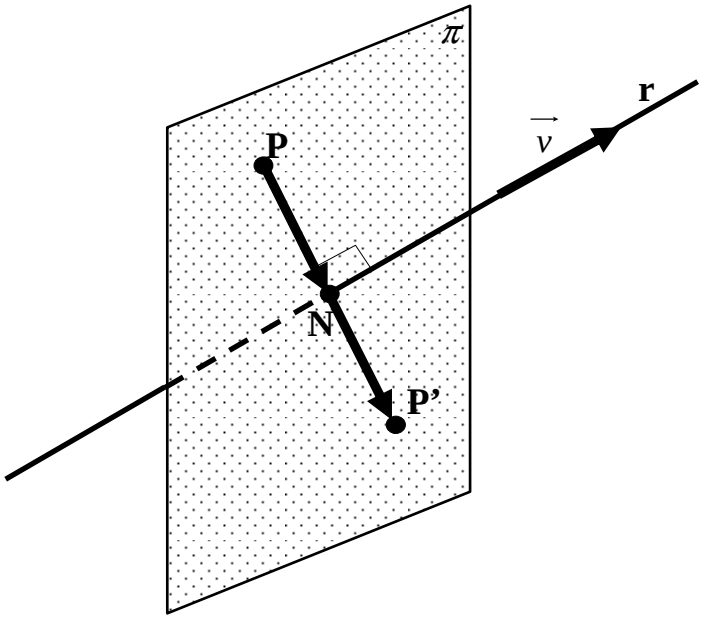
$\Rightarrow\ -bc=1\ ;;\ \underline{b=1},\ \underline{c=-1}$

Una matriz solución de lo pedido es $\underline{\underline{B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & d\\ 0 & f\end{bmatrix},,\ \forall d,\ f\in R}}$.

****

2º) Hallar el simétrico del punto P(4, -1, 1) respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ x-2y-z+3=0 \end{cases}$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio ilustramos con un esquema la situación.



La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ x-2y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=3 \\ x-z=-3+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=2\lambda \;;;\; \underline{x=\lambda}$$

$$x+z=3 \;;;\; z=3-x=\underline{3-\lambda=z} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de r puede ser $\vec{v}=(1,\ 1,\ -1)$.

El plano π', perpendicular a r por P, es el que tiene como vector normal a $\vec{v}$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x+y-z+D=0 \\ P(4,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 4-1-1+D=0 \;;;\; \underline{D=-2} \Rightarrow \underline{\pi' \equiv x+y-z-2=0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x+y-z-2=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+\lambda-(-\lambda)-2=0 \;;;\; 3\lambda=2 \;;;\; \underline{\lambda=\frac{2}{3}} \Rightarrow \underline{N\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}$$

Para que N sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \;;;\; \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right) - (4,\ -1,\ 1) = (x,\ y,\ z) - \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right);;$$

$$\left(\frac{2}{3} - 4,\ \frac{2}{3} + 1,\ -\frac{2}{3} - 1\right) = \left(x - \frac{2}{3},\ y - \frac{2}{3},\ z + \frac{2}{3}\right) \;;;$$

$$\left(-\frac{10}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{3x-2}{3},\ \frac{3y-2}{3},\ \frac{3z+2}{3}\right) \;;;\; (-10,\ 5,\ -5) = (3x-2,\ 3y-2,\ 3z+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 2 = -10 \quad \rightarrow \underline{x = -\frac{8}{3}} \\ 3y - 2 = 5 \quad \rightarrow \underline{y = \frac{7}{3}} \\ 3z + 2 = -5 \quad \rightarrow \underline{z = -\frac{7}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(-\frac{8}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{7}{3}\right)}}$$

****

OPCIÓN C

1º) Calcular las siguientes integrales indefinidas: $I_1 = \int L(x+1)dx$ e $I_2 = \int \frac{2}{x^2-1}dx$.

$I_1 = \int L(x+1)dx$

Sabiendo que la fórmula de la integración por partes es $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ y que:

$$I_1 = \int L(x+1)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u = L(x+1) \to du = \frac{1}{x+1}\cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = L(x+1)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x+1}\cdot dx =$$

$$= x\,L(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx = x\,L(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = x\,L(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= x\,L(x+1) - \int dx + L(x+1) = x\,L(x+1) - x + L(x+1) + C = \underline{\underline{(x+1)L(x+1) - x + C = I_1}}$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx = \int\left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\right)dx = \int \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}dx =$$

$$= \int \frac{(A+B)x + (-A+B)}{(x+1)(x-1)}dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} \underline{B=1} \;;;\; \underline{A=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -L(x+1) + L(x-1) + C = \underline{L\frac{x-1}{x+1} + C = I_2}$$

****

2º) Hallar las asíntotas de la curva $y = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma f cuando x tiende a valer $\pm\infty$.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x - 2 = 0$;; $\underline{\underline{x = 2}}$.

<u>Oblicuas</u>: son de la forma $y = mx + n$, siendo $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$, siendo m un valor real distinto de cero (asíntota horizontal) y n cualquier valor real.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \underline{1 = m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \underline{0 = n}$$

$$Asíntota\ \ oblícua: \ \underline{\underline{y = x}}$$

****

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la pendiente de la tangente a la curva $y=\sqrt{tag\left(L\,x\right)}$ en el punto de abscisa $x=e^{\frac{\pi}{4}}$, vale $e^{-\frac{\pi}{4}}$.

La pendiente m a una curva en un punto es el valor de la derivada para el valor de la abscisa en dicho punto.

La derivada de la función puede obtenerse de la forma siguiente:

$$y=\sqrt{tag\left(L\,x\right)}=\sqrt{u}\ \Rightarrow\ y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\qquad(1)$$

$$u=tag\left(L\,x\right)=tag\ z\ ;;\ u'=\frac{z'}{\cos^2 z}\qquad(2)$$

$$z=L\,x\ ;;\ \underline{z'=\frac{1}{x}}\ ;;\ Sustituyendo\ \ el\ \ valor\ \ de\ \ z'\ \ en\ \ (2):$$

$$u'=\frac{z'}{\cos^2 z}=\frac{\frac{1}{x}}{\cos^2 z}=\underline{=u'}\ ;;\ Sustituyendo\ \ el\ \ valor\ \ de\ \ u'\ \ en\ \ (1):$$

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{\frac{1}{x\cos^2\left(L\,x\right)}}{2\sqrt{tag\left(L\,x\right)}}=\underline{\frac{1}{2x\left[\cos^2\left(L\,x\right)\right]\sqrt{tag\left(L\,x\right)}}=y'}$$

Particularizando para $x=e^{\frac{\pi}{4}}$:

$$m=y'\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1}{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\cos^2\left(L\,e^{\frac{\pi}{4}}\right)\right]\sqrt{tag\left(L\,e^{\frac{\pi}{4}}\right)}}=\frac{1}{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\sqrt{tag\,\frac{\pi}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}=\underline{\underline{e^{-\frac{\pi}{4}}=m}},\quad \underline{\underline{c.q.d.}}$$

****

2º) Calcular el área del área de la región encerrada entre las gráficas de la curva $y = 7 - x^2$ y la curva $y = x^2 + 2x + 3$.

Se trata de dos parábolas, cuyos puntos de corte se obtienen de la igualación de sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2x + 3 \\ \\ y = 7 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 7 - x^2 \;\; ;; \;\; 2x^2 + 2x - 4 = 0 \;\; ;; \;\; x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 6 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{A(1,\ 6)} \\ \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{B(-2,\ 3)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de cada una de las parábolas con el eje OX son los siguientes:

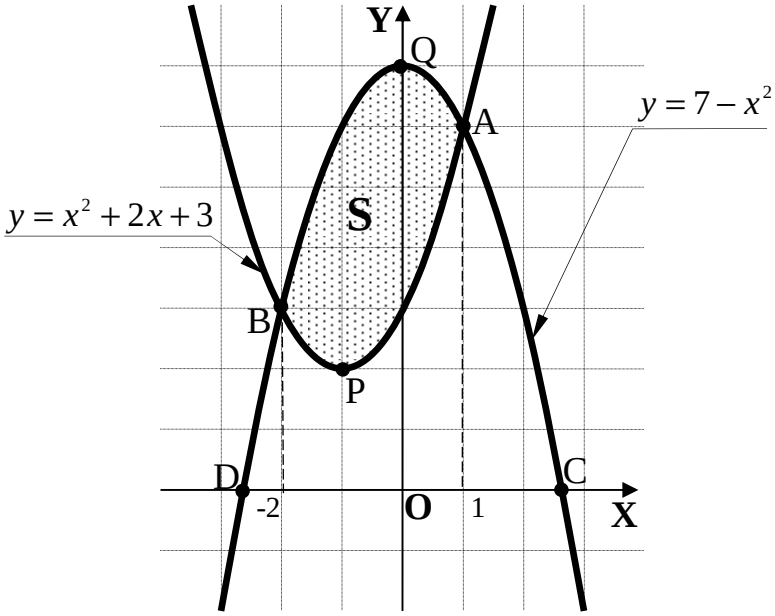
$$y = x^2 + 2x + 3 = 0 \;\; ;; \;\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow x \notin R \;\; \Rightarrow \;\; \underline{No\ \ corta\ \ al\ \ eje\ \ OX}$$

$$7 - x^2 = 0 \;\; ;; \;\; x^2 = 7 \;\; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{7} \;\; \rightarrow \;\; \underline{C(\sqrt{7},\ 0)} \\ \\ x_2 = -\sqrt{7} \;\; \rightarrow \;\; \underline{D(-\sqrt{7},\ 0)} \end{cases}$$

Los extremos absolutos de cada una de las parábolas son:

$$y = x^2 + 2x + 3 \;\; ;; \;\; y' = 2x + 2 \;\; ;; \;\; y'' = 2 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \textit{Mínimo.}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \;\; ;; \;\; x + 1 = 0 \;\; ;; \;\; x = -1 \;\; \Rightarrow \;\; y(-1) = 1 - 2 + 3 = 2 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\textit{Mínimo}:\ P(-1,\ 2)}$$



$y = 7 - x^2$;; $y' = -2x$;; $y'' = -2 < 0$ *Máximo.*

$y' = 0 \Rightarrow -2x = 0$;; $x = 0 \Rightarrow y(0) = 7 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo}: Q(0,\ 7)}$

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura, en donde se puede observar que las ordenadas de la parábola $y = 7 - x^2$ son, en el entorno del área, iguales o mayores a las correspondientes ordenadas de la parábola $y = x^2 + 2x + 3$.

De lo anterior se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[\left(7 - x^2\right) - \left(x^2 + 2x + 3\right) \right] \cdot dx = \int_{-2}^{1} \left(7 - x^2 - x^2 - 2x - 3\right) \cdot dx = \int_{-2}^{1} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} - 1^2 + 4 \cdot 1 \right) - \left[-\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \right] =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4 \right) - \left(\frac{16}{3} - 4 - 8 \right) = -\frac{2}{3} + 3 - \frac{16}{3} + 12 = 15 - \frac{18}{3} = 15 - 6 = \underline{\underline{9\ u^2 = S}}$$

****