PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una pregunta de cada una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x - ay + z = 0 \\ x + 3z = a - 2 \\ -x + 2ay + (a+3)z = a^2 + a - 6 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2a & a+3 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & a-2 \\ -1 & 2a & a+3 & a^2+a-6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2a & a+3 \end{vmatrix} = 2a + 3a - 6a + a(a+3) = -a + a^2 + 3a = a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 0} \\ \underline{a_2 = -2} \end{cases}$$

$$Para \ \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M' = 3 = n^o \ incóg. \Rightarrow Compatible \ Determinado$$

$$Para \ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \ Equivalente \ a \ la \ matriz \ M'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -18+2+6+6 = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a = 0 \Rightarrow Rango\;\; M = 2\;\;;;\;\; Rango\;\; M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\;\; a = -2 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Veámos\;\; cual\;\; es\;\; el\;\; rango\;\; de\;\; M':$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 8-16+8 = 16-16 = 0 \\ \\ \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12+4+4+4 = 12-12 = 0 \\ \\ \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -24+16+8 = 24-24 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a = -2 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 2 < n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Indeterminado}}$$

En primer lugar resolvemos para el caso de compatible determinado, para los valores reales de x distintos de 0 y -2, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a & 1 \\ a-2 & 0 & 3 \\ a^2+a-6 & 2a & a+3 \end{vmatrix}}{a(a+2)} = \frac{2a(a-2) - 3a(a^2+a-6) + a(a-2)(a+3)}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{2a^2 - 4a - 3a^3 - 3a^2 + 18a + a^3 + 3a^2 - 2a^2 - 6a}{a(a+2)} = \frac{-2a^3 + 8a}{a(a+2)} = \frac{-2a(a^2-4)}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{-2(a+2)(a-2)}{a+2} = \underline{\underline{2(2-a) = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 3 \\ -1 & a^2+a-6 & a+3 \end{vmatrix}}{a(a+2)} = \frac{(a-2)(a+3) + (a^2+a-6) + (a-2) - 3(a^2+a-6)}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2+3a-2a-6-2\left(a^2+a-6\right)+a-2}{a\left(a+2\right)} = \frac{a^2+2a-8-2a^2-2a+12}{a\left(a+2\right)} = \frac{-a^2+4}{a\left(a+2\right)} =$$

$$= \frac{-\left(a+2\right)\left(a-2\right)}{a\left(a+2\right)} = \underline{\underline{\frac{2-a}{a} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a-2 \\ -1 & 2a & a^2+a-6 \end{vmatrix}}{a\left(a+2\right)} = \frac{a\left(a-2\right)-2a\left(a-2\right)+a\left(a^2+a-6\right)}{a\left(a+2\right)} =$$

$$= \frac{a^2-2a-2a^2+4a+a^3+a^2-6a}{a\left(a+2\right)} = \frac{a^3-4a}{a\left(a+2\right)} = \frac{a\left(a^2-4\right)}{a\left(a+2\right)} = \frac{\left(a+2\right)\left(a-2\right)}{a+2} = \underline{\underline{a-2 = z}}$$

Resolvemos ahora el caso de compatible indeterminado, que resulta para a = -2, en cuyo caso resulta el siguiente sistema: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3z=-4 \\ -x-4y+z=-4 \end{cases}$; despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando la variable z:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3z=-4 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow x=-4-3\lambda \Rightarrow x+2y+z=0 \;;;\; -4-3\lambda+2y+\lambda=0 \;;;$$

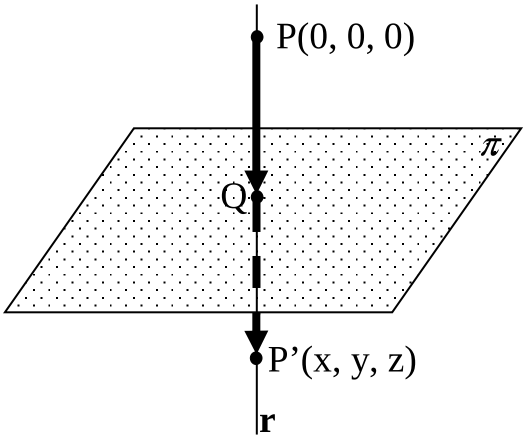
$$2y=4+2\lambda \;;;\; \underline{y=2+\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-4-3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Halla el simétrico del punto P(0, 0, 0) respecto del plano $\pi \equiv 2x - y + z + 6 = 0$.

Un vector normal al plano π es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$.



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director pude ser el vector normal del plano, y entonces:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$$

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\pi \equiv 2x - y + z + 6 = 0 \ \Rightarrow \ (4k) - (-k) + k + 6 = 0 \ ;; \ 6k + 6 = 0 \ ;; \ k + 1 = 0 \ ;; \ \underline{k = -1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{Q(-2,\ 1,\ -1)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow \ Q - P = P' - Q \ ;; \ (-2,\ 1,\ -1) - (0,\ 0,\ 0) = (x,\ y,\ z) - (-2,\ 1,\ -1) \ ;;$$

$$(-2,\ 1,\ -1) = (x + 2,\ \ y - 1,\ \ z + 1) \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x + 2 = -2 & \rightarrow & \underline{x = -4} \\ y - 1 = & \rightarrow & \underline{y = 2} \\ z + 1 = -1 & \rightarrow & \underline{z = -2} \end{array} \right\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(-4,\ 2,\ -2)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Siendo las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, calcular el valor del determinante de la matriz A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 6 - 3 - 4 - 4 = 12 - 11 = 1$$

$$\underline{\underline{|A + B| = 1}}$$

****

2º) Hallar la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P(1, 1, 0) y corta a las rectas $r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ x-2y-z-3=0 \end{cases}$.

En primer lugar determinamos un plano α que contenta a la recta r y al punto P.

Un punto y un vector director de la recta r_1 son A(0, 1, 1) y $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1,\ 1)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 0,\ -1)$.

La expresión general del plano α es la siguiente:

$$\alpha(P;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{w_1}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -(x-1)+(y-1)-z+(y-1)=0 \ ;;$$

$$-(x-1)+2(y-1)-z=0 \ ;;\ -x+1+2y-2-z=0 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x-2y+z+1=0}$$

Ahora determinamos un plano β que contenga a la recta r_2 y al punto P.

La expresión de la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ x-2y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda}\ ;;\ \left.\begin{array}{r} 3x-2y=1-\lambda \\ x-2y=3+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=4\ ;;\ \underline{x=1}$$

$$x-2y=3+\lambda\ ;;\ 1-2y=3+\lambda\ ;;\ 2y=-2-\lambda\ ;;\ \underline{y=-1-\frac{1}{2}\lambda} \Rightarrow \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-1-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de la recta r_2 son B(1, -1, 0) y $\overrightarrow{v_2} = (0,\ -1,\ 2)$.

Los puntos B y P determinan el vector $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{BP} = P - B = (0,\ 2,\ 0)$.

La expresión general del plano β es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -4(x-1)=0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x-1=0}$$

La recta pedida s, es la intersección de los planos α y β por lo que su expresión por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

****

OPCIÓN C

1º) Dada la función $f(x)=x^3+sen\,\frac{\pi x}{2}$, demuestra que existe $\alpha\in(0,\ 1)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Di qué teorema utilizas.

Teniendo en cuenta que la función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser suma de dos funciones continuas y derivables es sus respectivos dominios que ambos sor R, le es aplicable el Teorema del Valor Medio o de Lagrange en cualquier intervalo finito considerado.

El Teorema del Valor Medio dice:

Si f(x) es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{\left(1+sen\,\frac{\pi}{2}\right)-(0+sen\ 0)}{1-0}=\frac{(1+1)-0}{1}=\underline{2=f'(\alpha)}\quad \underline{c.q.d.}$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto,\ \ existe\ \ un\ \ valor\ \ \alpha\in(0,\ 1)\ \ tal\ \ que\ \ f'(\alpha)=2}}\ .$$

****

2º) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{e^{-x}+x-1}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\infty-\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}\left[(x+1)-(x-1)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}\left(x+1-x+1\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} = \frac{\infty+\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}}{2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{2} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}{2} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{e^{-x}+x-1} = \frac{1-\cos 0}{e^{-0}+0-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{-e^{-x}+1} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{1-e^{-x}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{e^{-x}+0} = \frac{\cos 0}{e^{-0}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

****

OPCIÓN D

1º) Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 4]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y los cortes con los ejes.

$$f(x)=2\,sen\,\frac{\pi}{2}x \quad si \;\; 0\le x\le 4 \;\; ; \;\; g(x)=sen\,\frac{\pi}{2}x \quad si \;\; 0\le x\le 4$$

$$f(x)=2\;sen\;\frac{\pi x}{2} \;\;;;\;\; f'(x)=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}=\underline{\pi\cos\frac{\pi x}{2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=-\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\;\frac{\pi x}{2}=\underline{-\frac{\pi^2}{2}sen\;\frac{\pi x}{2}=f''(x)}$$

$$f'(x)=0\;\; en\;\;[0,\;4]\;\Rightarrow\;\pi\cos\frac{\pi x}{2}=0\;\Rightarrow\;\underline{x_1=1}\;\;;;\;\;\underline{x_2=3}$$

$$f''(1)=-\frac{\pi^2}{2}sen\;\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2}\cdot 1=-\frac{\pi^2}{2}<0\;\Rightarrow\;\underline{M\acute{a}ximo\;\;relativo\;\;para\;\;x=1}$$

$$f''(3)=-\frac{\pi^2}{2}sen\;\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2}\cdot(-1)=+\frac{\pi^2}{2}>0\;\Rightarrow\;\underline{M\acute{\imath}nimo\;\;relativo\;\;para\;\;x=3}$$

$$f(1)=2\,sen\;\frac{\pi}{2}=2\cdot 1=2\;\;\Rightarrow\;\;\underline{\underline{M\acute{a}x.:\;\;A(1,\;2)}}$$

$$f(3)=2\,sen\;\frac{3\pi}{2}=2\cdot(-1)=-2\;\;\Rightarrow\;\;\underline{\underline{M\acute{\imath}in.:\;\;B(3,\;-2)}}$$

$$g(x)=sen\;\frac{\pi x}{2}\;\;;;\;\;\underline{g'(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$g''(x)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\;\frac{\pi x}{2}=\underline{-\frac{\pi^2}{4}sen\;\frac{\pi x}{2}=g''(x)}$$

$$g'(x)=0\;\; en\;\;[0,\;4]\;\Rightarrow\;\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}=0\;\Rightarrow\;\underline{x_1=1}\;\;;;\;\;\underline{x_2=3}$$

$$g''(1)=-\frac{\pi^2}{4}sen\;\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2}\cdot 1=-\frac{\pi^2}{2}<0\;\Rightarrow\;\underline{M\acute{a}ximo\;\;relativo\;\;para\;\;x=1}$$

$$g''(3)=-\frac{\pi^2}{4}sen\;\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{2}\cdot(-1)=+\frac{\pi^2}{2}>0\;\Rightarrow\;\underline{M\acute{\imath}nimo\;\;relativo\;\;para\;\;x=3}$$

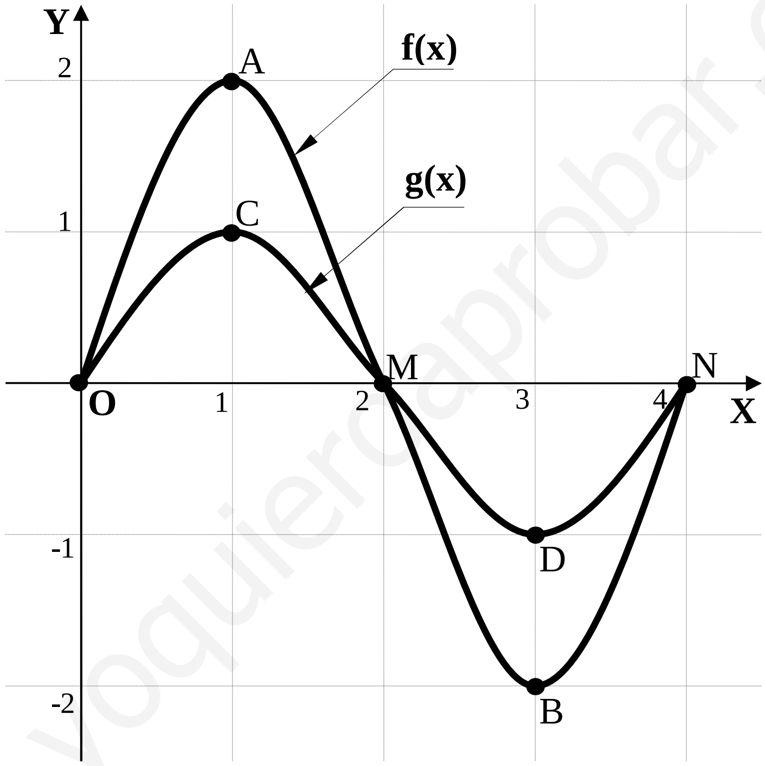
$$g(1) = sen\,\frac{\pi}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx.:\; C(1,\; 1)}} \;\;;;\;\; g(3) = sen\,\frac{3\pi}{2} = -1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mín.:\; D(3,\; -1)}}$$

Los cortes con los ejes de las funciones en el intervalo [0, 4] son los siguientes:

$$f(x) = 2\,sen\,\frac{\pi x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;;;\; x_2 = 2 \;\;;;\; x_3 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\; 0)}} \;;;\; \underline{\underline{M(2,\; 0)}} \;;;\; \underline{\underline{N(4,\; 0)}}$$

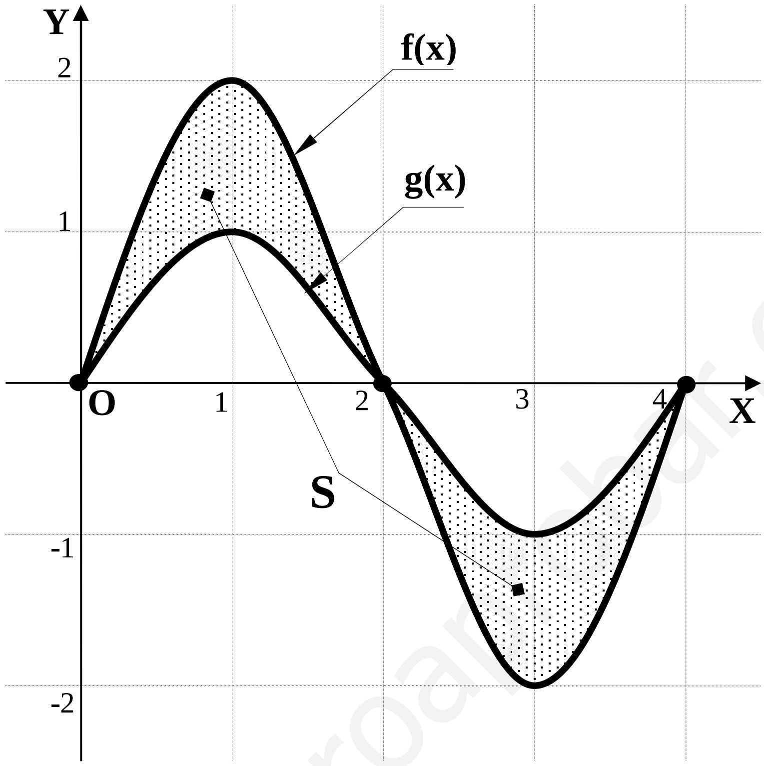
$$g(x) = sen\,\frac{\pi x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;;;\; x_2 = 2 \;\;;;\; x_3 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\; 0)}} \;;;\; \underline{\underline{M(2,\; 0)}} \;;;\; \underline{\underline{N(4,\; 0)}}$$

La representación gráfica de las funciones es, aproximadamente, la siguiente:



****

2º) Calcular el área del área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones dadas en el apartado anterior; es decir, calcula la integral definida siguiente: $\int_0^4 [f(x)-g(x)] \cdot dx$.



$$S=\int_0^4 [f(x)-g(x)] \cdot dx = 2\cdot\int_0^2 [f(x)-g(x)] \cdot dx = 2\cdot\int_0^2 \left(2\,sen\,\frac{\pi x}{2}-sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\left[\int_0^2 2\,sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx-\int_0^2 sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx\right]= 2\cdot\left[2\cdot\int_0^2 sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx-\int_0^2 sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx\right]=$$

$$= 2\cdot\int_0^2 sen\,\frac{\pi x}{2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\pi x}{2}=t \to x=\frac{2}{\pi} \\ dx=\frac{2}{\pi}dt \end{array}\middle\| \begin{array}{c} x=2\to t=\pi \\ x=0\to t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow S = 2\cdot\int_0^{\pi} sen\,t\cdot\frac{2}{\pi}dt =$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} sen\,t\cdot dt=\frac{4}{\pi}\cdot[-\cos t]_0^{\pi}=-\frac{4}{\pi}\cdot[\cos t]_0^{\pi}=-\frac{4}{\pi}\cdot(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{4}{\pi}\cdot(-1-1)=$$

$$=\underline{\underline{\frac{8}{\pi}\,u^2=S}}$$

****