PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x - az = -1 \\ x + (a+3)y + (4-a)z = 0 \\ x + (a+3)y + (a^2+2)z = a+2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{pmatrix} \;\; y \;\; A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Restando\ a\ cada \\ fila\ la\ anterior \end{Bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & a+3 & 4 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3)(a^2+a-2) = (a+3)(a-1)(a+2) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1 = -3} \;;;\; \underline{a_2 = 1} \;;;\; \underline{a_3 = -2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq -3 \\ a \neq 1 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

Veamos cuál es el rango de la matriz ampliada para los valores que anulan el determinante de la matriz de coeficientes:

$$a=-3 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 11 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 7 & 0\\ 1 & 11 & -1\end{vmatrix}=-7-11+7+3=-8\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{Rang\ \ A'=3}.$$

$$a=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=12-4+4=12\neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rang\ \ A'=3}.$$

$$a=-2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 1 & 6 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rango\ \ A' \ \Rightarrow \ \underline{Rang\ \ A'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq -3\\ a\neq 1\end{Bmatrix} \Rightarrow \ Rango\, M \neq Rango\ M' \ \Rightarrow \ Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-2 \ \Rightarrow \ Rango\, M = Rango\ M'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos en primer lugar en el caso de compatible determinado aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases}x-az=-1\\ x+(a+3)y+(4-a)z=0\\ x+(a+3)y+\left(a^2+2\right)z=a+2\end{cases}$$. Restando la primera ecuación a las otras dos:

$$\left.\begin{array}{r}x-az=-1\\ (a+3)y+4z=1\\ (a+3)y+\left(a^2+a+2\right)z=a+3\end{array}\right\}$$. Restando a la tercera ecuación la segunda:

$$\left.\begin{array}{r}x-az=-1\\ (a+3)y+4z=1\\ \left(a^2+a-2\right)z=a+3\end{array}\right\} \ ;; \ \left.\begin{array}{r}x-az=-1\\ (a+3)y+4z=1\\ (a-1)(a+2)z=a+2\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{z=\frac{1}{a-1}}}.$$

$$y=\frac{1-4z}{a+3}=\frac{1-\frac{4}{a-1}}{a+3}=\frac{a-1-4}{(a-1)(a+3)}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y=\frac{a-5}{(a-1)(a+3)}}}.$$

$$x=-1+az=-1+\frac{a}{a-1}=\frac{-a+1+a}{a-1}=\underline{\underline{\frac{1}{a-1}=x}}.$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado:

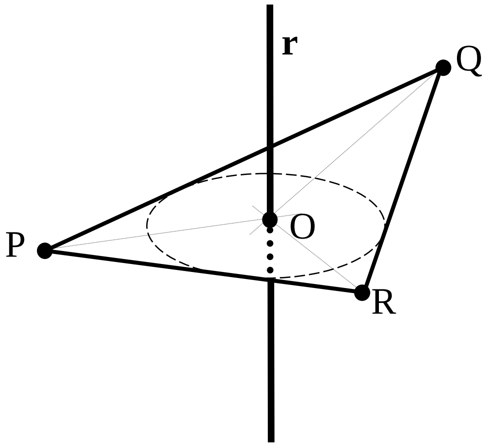
Para a = -2 el sistema resulta el siguiente: $\begin{cases} x+2z=-1 \\ x+y+6z=0 \\ x+y+6z=0 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\begin{cases} x+2z=-1 \\ x+y+6z=0 \end{cases}$. Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$:

$\underline{x=-1-2\lambda}$;; $-1-2\lambda+y+6\lambda=0$;; $\underline{y=1-4\lambda}$

$$\underline{\underline{Solución:\ Para\ \ x=-2\ \Rightarrow\ \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=\lambda \end{cases},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Halla la ecuación continua de la recta r formada por todos los puntos que equidistan de los puntos P(1, -1, 0), Q(-1, 3, 2) y R(3, 1, -2).



La recta r pedida es perpendicular al plano que contiene al triángulo de vértices los puntos dados P, Q y R y pasa por el punto O, que es el incentro del triángulo.

La recta r también puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos dados.

Utilizando la última de las definiciones, sería:

$$d\left(\overline{OP}\right)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2}=$$

$$=\underline{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x+2y+2}=d\left(\overline{OP}\right)}$$

$$d\left(\overline{OQ}\right)=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}=\sqrt{x^2+2x+1+y^2-6y+9+z^2-4z+4}=$$

$$=\underline{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+14}=d\left(\overline{OQ}\right)}$$

$$d\left(\overline{OR}\right)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}=\sqrt{x^2-6x+9+y^2-2y+1+z^2+4z+4}=$$

$$=\underline{\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+14}=d\left(\overline{OR}\right)}$$

$$d\left(\overline{OP}\right)=d\left(\overline{OQ}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x+2y+2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+14}\ \ ;;$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+2=x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+14\ \ ;;\ \ -4x+8y+4z=12\ \ ;;$$

$$\underline{-x+2y+z=3}\qquad(1)$$

$$d\left(\overline{OP}\right)=d\left(\overline{OR}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x+2y+2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+14}\ \ ;;$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+2=x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+14\ \ ;;\ \ 4x+4y-4z=12\ \ ;;$$

$$\underline{x+y-z=3}\qquad(2)$$

$$d\left(\overline{OQ}\right)=d\left(\overline{OR}\right)\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+14}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+14}\ \ ;;$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+14=x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+14\ \ ;;\ \ 8x-4y-8z=0\ \ ;;$$

$$\underline{2x-y-2z=0}\qquad (3)$$

Como puede observarse, la ecuación (3) no hubiera sido necesario calcularla: de las dos primeras igualdades se obtienen dos planos cuya intersección es la recta pedida; necesariamente la tercera ecuación tiene que ser linealmente dependiente de las dos primeras, $\{(2)-(1)=(3)\}$.

La expresión de r por ecuaciones implícita es $r\equiv\begin{cases}-x+2y+z=3\\ x+y-z=3\end{cases}$, pero nos piden su expresión en forma continua, para lo cual hacemos lo siguiente:

$$r\equiv\begin{cases}-x+2y+z=3\\ x+y-z=3\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \ ;;\ \ \left.\begin{array}{r}-x+2y=3-\lambda\\ x+y=3+\lambda\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 3y=6\ \ ;;\ \ \underline{y=2}$$

$$x=3-y+z=3-2+\lambda=\underline{1+\lambda=x}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\\ z=\lambda\end{cases}}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-0}{1}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula el valor de t para que el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ t-1 & t & 2 \\ t-1 & t & t+1 \end{bmatrix}$ sea 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ t-1 & t & 2 \\ t-1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & t & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \cdot [t(t+1) + 2 - 2t - (t+1)] =$$

$$= (t-1) \cdot (t^2 + t + 2 - 2t - t - 1) = (t-1)(t^2 - 2t + 1) = (t-1)(t-1)^2 = (t-1)^3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t = 1}}$$

El único valor de t que anula el determinante de la matriz A es 1.

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P(1, 1, 0) y corta a las rectas $r_1 \equiv \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 3x+y-z+8=0 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r_1 son $A(-3,\ 2,\ 5)$ y $\overrightarrow{v_1} = (-1,\ 0,\ 2)$.

La expresión de la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 3x+y-z+8=0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y = 2-\lambda \\ 3x+y = -8+\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x-y = -2+\lambda \\ 3x+y = -8+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = -10+2\lambda \ ;;$$

$$\underline{x = -5+\lambda} \ ;; \ x+y = 2-\lambda \ ;; \ y = 2-\lambda+5-\lambda = \underline{7-2\lambda = y} \ \Rightarrow \ \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x = -5+\lambda \\ y = 7-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto de la recta r_2 es $B(-5,\ 7,\ 0)$ y un vector director es $\overrightarrow{v_2} = (1,\ -2,\ 1)$.

El punto P con los puntos A y B determina los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{PA} = A - P = (-3,\ 2,\ 5) - (1,\ 1,\ 0) = \underline{(-4,\ 1,\ 5) = \overrightarrow{u_1}}$$

$$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{PB} = B - P = (-5,\ 7,\ 0) - (1,\ 1,\ 0) = \underline{(-6,\ 6,\ 0) = \overrightarrow{u_2}}$$

El plano α que pasa por P y contiene a la recta r_1 es el siguiente:

$$\alpha(P;\ \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{v_1}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 2(x-1) - 5(y-1) + z + 8(y-1) = 0 \ ;;$$

$$2(x-1) + 3(y-1) + z = 0 \ ;; \ 2x - 2 + 3y - 3 + z = 0 \ ;; \ \underline{\alpha \equiv 2x + 3y + z - 5 = 0}$$

El plano β que pasa por P y contiene a la recta r_2 es el siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -6 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 6(x-1) + 12z - 6z + 6(y-1) = 0 \ ;;$$

$$6x - 6 + 6z + 6y - 6 = 0 \ ;; \ x - 1 + z + y - 1 = 0 \ ;; \ \underline{\beta \equiv x + y + z - 2 = 0}$$

La recta s pedida es la que determinan los planos α y β: $s \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-5=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$.

La expresión de la recta s en forma continua es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-5=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=5-\lambda \\ x+y=2-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+3y=5-\lambda \\ -2x-2y=-4+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=1+\lambda} \;\;;;$$

$$x+y=2-\lambda \;\;;;\;\; x=2-\lambda-1-\lambda=\underline{1-2\lambda=x} \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}}}$$

****

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Hallar la integral indefinida $I=\int \frac{dx}{x^2+x-6}\cdot dx$.

$$x^2+x-6=0\ ;;\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=-3\end{cases}\Rightarrow\ \underline{x^2+x-6=(x-2)(x+3)}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2+x-6}\cdot dx=\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)}\cdot dx\ \Rightarrow\ \frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=$$

$$=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A-2B)}{x^2+x-6}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}A+B=0\\3A-2B=1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}2A+2B=0\\3A-2B=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ 5A=1\ ;;$$

$$\underline{A=\frac{1}{5}}\ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{5}}\ \Rightarrow\ \int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{5}}{x+3}\right)\cdot dx=\frac{1}{5}L|x-2|-\frac{1}{5}L|x+3|+C=$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{5}L\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=I}}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = x \; sen \, \frac{\pi x}{4}$, demuestra que existe $\alpha \in (0,\ 4)$ tal que $f(\alpha) = f(\alpha+1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(Ayuda: usa una nueva función g construida adecuadamente a partir de f)

Si se considera la función $g(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1) \; sen \, \frac{\pi(x+1)}{4} - x \; sen \, \frac{\pi x}{4}$, demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que existe $\alpha \in (0,\ 4)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

El Teorema de Bolzano dice que “si una función f(x) es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y en los extremos de éste toma valores de diferente signo, entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo $(a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$”.

La función g(x) es continua en su dominio, que es R, por lo tanto lo será en cualquier intervalo finito considerado y, como consecuencia, le es aplicable el Torema de Bolzano en el intervalo [0, 4]:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 1 \cdot sen \, \frac{\pi}{4} - 0 \cdot sen \, 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ \\ g(4) = 5 \cdot sen \, \frac{5\pi}{4} - 4 \cdot sen \, \pi = 5 \cdot \left(- sen \, \frac{\pi}{4} \right) - 4 \cdot 0 = -5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{array}\right\}$$

Según el mencionado Teorema de Bolzano,

$$\underline{\underline{\exists \alpha \in (0,\ 4) \ \ para \ \ el \ \ cual \ \ se \ \ cumple \ \ que \ \ f(\alpha) = f(\alpha+1), \ \ como \ \ queríamos \ \ demostrar}}$$

****

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la función $f(x) = (1 - x^2) \cdot sen\ x$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\ \frac{\pi}{2})$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

La función $f(x) = (1 - x^2) \cdot sen\ x$ es continua y derivable en todos los puntos de su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el Teorema de Rolle en cualquier intervalo de su dominio que se considere.

El Teorema de Rolle dice que "si una función f(x) es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y es derivable en $(a,\ b)$ y si, además se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c perteneciente al intervalo $(a,\ b)$ tal que $f'(c) = 0$".

La función $f(x) = (1 - x^2) \cdot sen\ x$ se anula para los valores 0 y 1, pertenecientes al intervalo $[0,\ \frac{\pi}{2}]$, por lo que, según lo anterior, $\exists c \in [0,\ 1]\ tal\ \ que\ \ f'(c) = 0$.

Teniendo en cuenta que la condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que su derivada se anule en dicho punto, podemos asegurar que en el intervalo $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

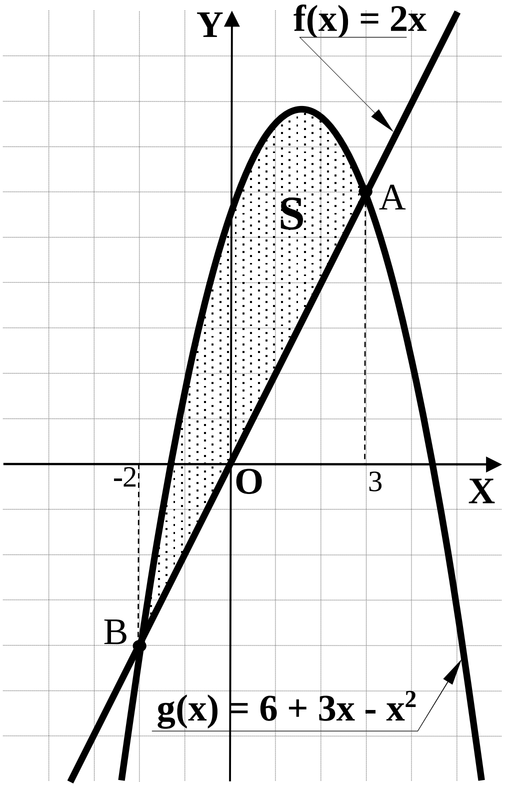
Teniendo en cuenta que en el intervalo $(0,\ 1)$ es f(x) > 0, según lo anterior se infiere que:

$$\underline{\underline{En\ \ el\ \ \text{int}ervalo\ (0,\ \tfrac{\pi}{2})\ existe\ \ al\ \ menos\ \ un\ \ máximo\ \ relativo,\ c.q.d.}}$$

****

2º) Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + 3x - x^2$.

Los puntos de corte de las dos funciones son los siguientes:



$$2x = 6 + 3x - x^2 \;\;;;\;\; x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow \underline{A(3,\ 6)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,\ -4)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola mayores que las de la recta en el intervalo (-2, 3), la superficie es la diferencia de las limitadas por la parábola y la recta, respectivamente, o sea:

$$S = \int_{-2}^{3} \left[\left(6 + 3x - x^2\right) - 2x\right] \cdot dx = \int_{-2}^{3} \left(-x^2 + x + 6\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left(-9 + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(+\frac{8}{3} + 2 - 12\right) = 9 + \frac{9}{2} + 10 - \frac{8}{3} = 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 - 16}{6} = \frac{125}{6}\ u^2 = S$$

****