PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2007

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+az=0 \\ ax+(3a-1)y+\left(1+a^2\right)z=2 \\ x+2y+\left(a^2-a\right)z=a-2 \end{array}\right.$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 3a-1 & 1+a^2 \\ 1 & 2 & a^2-a \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ a & 3a-1 & 1+a^2 & 2 \\ 1 & 2 & a^2-a & a-2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 3a-1 & 1+a^2 \\ 1 & 2 & a^2-a \end{vmatrix}=(3a-1)\left(a^2-a\right)+2a^2+2+2a^2-a(3a-1)-2\left(1+a^2\right)-2a\left(a^2-a\right)=$$

$$=3a^3-3a^2-a^2+a+4a^2+2-3a^2+a-2-2a^2-2a^3+2a^2=a^3-3a^2+2a=a\left(a^2-3a+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=0 \;;;\; a^2-3a+2=0 \;;;\; a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \underline{a_2=1} \\ \underline{a_3=2} \end{array}\right..$$

$$Para \;\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq 2 \\ a\neq 1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^{o}\;\; incóg.\Rightarrow Compatible\;\; Determinado$$

$$Para\ \ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=2+4-4=2\neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_2=2C_1\} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+2+1=1\neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \begin{Bmatrix} a=0 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_2=C_3\} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4-4=0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ \ M'=2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos en primer lugar el caso de compatible determinado:

$\begin{cases} x+2y+az=0 \\ ax+(3a-1)y+(1+a^2)z=2 \\ x+2y+(a^2-a)z=a-2 \end{cases}$. Resolviendo por Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+az=0 \\ (a-1)y+z=2 \\ (a^2-2a)z=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{a-2}{a^2-2a}=\frac{a-2}{a(a-2)}=\underline{\underline{\frac{1}{a}}}=z.$$

$$y=\frac{2-z}{a-1}=\frac{2-\frac{1}{a}}{a-1}=\underline{\underline{\frac{2a-1}{a(a-1)}}}=y.$$

$$x=-2y-az=\frac{-4a+2}{a(a-1)}-1=\frac{-4a+2-a(a-1)}{a(a-1)}=\frac{-4a+2-a^2+a}{a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{-a^2-3a+2}{a(a-1)}=x}}$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado para a = -1, en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+5y+5z=2 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$, que por tener iguales la primera y tercera ecuaciones es equivalente al sistema $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+5y+5z=2 \end{cases}$. Parametrizando, por ejemplo, z:

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+5y+5z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=-2\lambda \\ 2x+5y=2-5\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-4y=4\lambda \\ 2x+5y=2-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=2-\lambda} \;\;;;$$

$$x+2y=-2\lambda \;\;;;\;\; x=-2y-2\lambda=-4+2\lambda-2\lambda \;\Rightarrow\; \underline{x=-4}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-4 \\ y=2-\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Los puntos $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(2, -2, 3)$ y $P_3(-1, 1, 3)$ son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice.

Para determinar la posición de los puntos hallamos las distancias entre ellos:

$$d\left(\overline{P_1P_2}\right)=\sqrt{(2-1)^2+(-2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=\underline{3\ u=d\left(\overline{P_1P_2}\right)}$$

$$d\left(\overline{P_1P_3}\right)=\sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=\underline{3\ u=d\left(\overline{P_1P_3}\right)}$$

El punto $P_4(x, y, z)$ a determinar es el opuesto a P_1 por lo cual se tiene que cumplir que los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_3P_4}$ son equipolentes.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_1P_2}=P_2-P_1=(2,\ -2,\ 3)-(1,\ 0,\ 1)=(1,\ -2,\ 2)\\ \\ \overrightarrow{P_3P_4}=P_4-P_3=(x,\ y,\ z)-(-1,\ 1,\ 3)=(x+1,\ y-1,\ z-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_3P_4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}x+1=1\\ y-1=-2\\ z-3=2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow x=0\\ \rightarrow y=-1\\ \rightarrow z=5\end{array}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_4(0,\ -1,\ 5)}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3 x 2 y de rango 2, tales que el rango de A · B sea 2 y el rango de A · C sea 1.

Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$. El producto de A · B es:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

La condición necesaria para que el rango de A · B sea 2 es que $ad \neq cb$, independientemente de los valores de e y f.

Un ejemplo puede ser la matriz: $\underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}}}$.

Sea la matriz $C = \begin{bmatrix} m & n \\ q & p \\ x & y \end{bmatrix}$. El producto de A · C es:

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ q & p \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ q & p \end{bmatrix}.$$

La condición necesaria para que el rango de A · C sea 1 es que $mp = qn$, independientemente de los valores de x e y.

Un ejemplo puede ser la matriz: $\underline{\underline{C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}}}$.

****

2º) El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3, 0, 0)$, $P_2(1, -1, -1)$ y $P_3(-1, 0, -1)$. Encuentra los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$ que están a distancia 1 de π.

La ecuación general del plano π se deduce de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (1,\ -1,\ -1) - (-3,\ 0,\ 0) = (4,\ -1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (-1,\ 0,\ -1) - (-3,\ 0,\ 0) = (2,\ 0,\ -1)$$

$$\pi(P_1;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y & z \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x+3-2y+2z+4y=0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x+2y+2z+3=0}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda - 2 \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda,\ 1,\ -\lambda-2)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(\pi,\ P_0) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula a $\pi \equiv x+2y+2z+3=0$ y a $P(\lambda,\ 1,\ -\lambda-2)$ y sabiendo que la distancia es de una unidad:

$$d(\pi,\ P) = \frac{|1\cdot\lambda + 2\cdot 1 + 2\cdot(-\lambda-2)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|\lambda+2-2\lambda-4+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|1-\lambda|}{\sqrt{9}} = \frac{|1-\lambda|}{3} = 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1-\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 3\ ;;\ \lambda = -2 \ \rightarrow\ \underline{\underline{P_1(-2,\ 1,\ 0)}} \\ -1+\lambda = 3\ ;;\ \lambda = 4 \ \rightarrow\ \underline{\underline{P_2(4,\ 1,\ -6)}} \end{cases}$$

****

<u>GRUPO 2</u>

<u>OPCIÓN C</u>

1º) Halla los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{L(2x+1)-sen\,(2x)}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} = \frac{0+0}{\infty-\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x+1}}}{(x+2)-(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x+1+1}{x+1}}+1}{x+2-x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}+1}{1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}+1\right) = \underline{\underline{4}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{L(2x+1)-sen\,(2x)} = \frac{1-1}{L1-0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}-(-2x)\cdot e^{-x^2}}{\frac{2}{1+2x}-2\cos\,(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^{x^2}+x \cdot e^{-x^2}}{\frac{1}{1+2x}-\cos\,(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)}{\frac{1-(1+2x)\cos\,(2x)}{1+2x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x+2x^2\right)\cdot\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)}{1-(1+2x)\cos\,(2x)} = \frac{0\cdot(1-1)}{1-1\cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(1+4x)\cdot\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)+\left(x+2x^2\right)\cdot\left(2x \cdot e^{x^2}-2x \cdot e^{-x^2}\right)}{-[2\cdot\cos(2x)-(1+2x)\cdot 2\cdot sen\,(2x)]} = \frac{1\cdot 2+0\cdot 0}{-(2\cdot 1-0\cdot 0)} = -\frac{2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

****

2º) Demuestra que la función $f(x)=(x+1)L\left(2x^2-x+1\right)$, tiene un mínimo relativo en el intervalo $(0,\ 1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que su derivada se anule para ese punto.

$$f'(x)=1\cdot L\left(2x^2-x+1\right)+(x+1)\cdot\frac{4x-1}{2x^2-x+1}=L\left(2x^2-x+1\right)+\frac{(x+1)(4x-1)}{2x^2-x+1}$$

La función f'(x) es continua en todos los puntos del intervalo [0, 1] y derivable en todos los puntos del intervalo (0, 1), por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que: "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

$$f'(x)=L\left(2x^2-x+1\right)+\frac{(x+1)(4x-1)}{2x^2-x+1}\Rightarrow\begin{cases}f'(0)=L\,1+\dfrac{1\cdot(-1)}{1}=0-1=-1<0\\ f'(1)=L\,2+\dfrac{2\cdot 3}{2-1+1}=L\,2+3>0\end{cases}$$

Lo anterior demuestra que la función f(x) tiene un extremo relativo en el intervalo $(0,\ 1)$. Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo recurrimos a la segunda derivada: $si\ \ f''(x)<0\Rightarrow máximo\ \ y\ \ si\ \ f''(x)>0\Rightarrow mínimo$.

$$f'(x)=L\left(2x^2-x+1\right)+\frac{(x+1)(4x-1)}{2x^2-x+1}=L\left(2x^2-x+1\right)+\frac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}$$

$$f''(x)=\frac{4x-1}{2x^2-x+1}+\frac{(8x+3)\left(2x^2-x+1\right)-\left(4x^2+3x-1\right)(4x-1)}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(4x-1)\left(2x^2-x+1\right)+\left(16x^3-8x^2+8x+6x^2-3x+3\right)-\left(16x^3-4x^2+12x^2-3x-4x+1\right)}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(8x^3-4x^2+4x-2x^2+x-1\right)+\left(16x^3-2x^2+5x+3\right)-\left(16x^3+8x^2-7x+1\right)}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^3-6x^2+5x-1-10x^2+12x+2}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=\underline{\frac{8x^3-16x^2+17x+1}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=f''(x)}$$

Para justificar que f''(x) > 0 tenemos en cuenta que el denominador de la fracción es positivo para cualquier valor real de x y que $17x > 16x^2, \ \forall x \in (0,\ 1)$, lo cual significa que el numerador de la fracción es positivo y, en resumen, $f''(x) > 0 \ \ en \ \ (0,\ 1)$, lo cual demuestra que

$$\underline{\underline{f(x) = (x+1)L\ (2x^2 - x + 1) \ tiene \ \ un \ \ mínimo \ \ en \ \ (0,\ 1),\ \ c.q.d.}}$$

****

OPCIÓN D

1º) Halla las asíntotas de la función $y = \frac{2x^2 + x}{x-1}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Las asíntotas horizontales son de la forma y = k, o sea, son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer más infinito o menos infinito.

La función $y = \frac{2x^2 + x}{x-1}$ no tiene asíntotas horizontales por ser:

$$\underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{2x^2 + x}{x-1} = +\infty$$

$$\underset{x \to -\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to -\infty}{lím} \frac{2 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{0-0} = \frac{2}{0} = +\infty$$

Las asíntotas verticales son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función $y = \frac{2x^2 + x}{x-1}$ tiene como asíntota vertical la recta x = 1.

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m = \underset{x \to \infty}{lím} \frac{f(x)}{x} = \underset{x \to \infty}{lím} \frac{2x^2 + x}{x(x-1)} = \underset{x \to \infty}{lím} \frac{2x+1}{x-1} = \underline{2 = m}$$

$$n = \underset{x \to \infty}{lím} [f(x) - mx] = \underset{x \to \infty}{lím} \left(\frac{2x^2 + x}{x-1} - 2x \right) = \underset{x \to \infty}{lím} \frac{2x^2 + x - 2x^2 + 2x}{x-1} =$$

$$= \underset{x \to \infty}{lím} \frac{3x}{x-1} = \underline{3 = n}$$

La función $y = \frac{2x^2 + x}{x-1}$ tiene como asíntota oblicua la recta y = 2x + 3.

****

2º) Dibuja las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = sen\frac{\pi x}{2}$. Comprueba que sólo se cortan cuando x = 0 o x = 1. Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x).

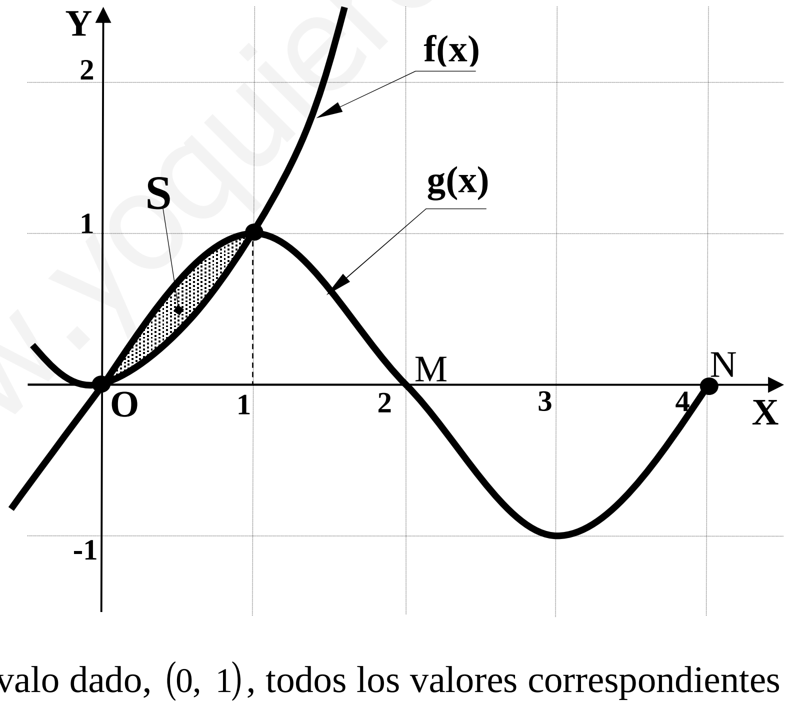
Los puntos de corte se obtienen de la igualación de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x^2 = sen\frac{\pi x}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; 0^2 = sen\ 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; sen\ \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Como puede apreciarse, para los valores x = 0 y x = 1 las funciones son iguales y, en definitiva, solamente se cortan para los valores dados, como queríamos comprobar.

Justifica lo anterior el hecho que la función $f(x) = x^2$ únicamente admite las soluciones 0, 1 y -1; para x = -1 es $f(-1) = (-1)^2 = 1$ y $g(-1) = sen\frac{-\pi}{2} = -1$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que expresa la figura adjunta.



En el intervalo dado, $(0,\ 1)$, todos los valores correspondientes a ambas funciones son positivos, por lo cual el área pedida es la diferencia en valor absoluto de las áreas de las dos funciones:

$$S = \left| \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x^2 - sen\frac{\pi x}{2} \right) \cdot dx \right| = \left| \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^0 sen\frac{\pi x}{2} \cdot dx \right| =$$

$$=\left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\int_1^0 sen\frac{\pi x}{2}\cdot dx\right|=\left|\frac{1}{3}-0+\int_1^0 sen\frac{\pi x}{2}\cdot dx\right|=\underline{\left|\frac{1}{3}+I\right|=S} \qquad (*)$$

$$I=\int_1^0 sen\frac{\pi x}{2}\cdot dx \;\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\frac{\pi x}{2}=t \\ dx=\frac{2}{\pi}dt\end{matrix}\;\middle\|\; \begin{matrix}\rightarrow x=0\rightarrow t=0 \\ \rightarrow x=1\rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow I=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sen\, t\cdot dt=\frac{2}{\pi}\left[-\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^0=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left[(-\cos 0)-\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\cos 0+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot(-1+0)=\underline{-\frac{2}{\pi}=I}$$

Sustituyendo en (*) el valor de I: $S=\left|\frac{1}{3}+I\right|=\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi}\right|=\underline{\underline{\frac{6-\pi}{3\pi}\,u^2=S}}$

****