PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a-1)x+ay+2z=-1 \\ (a-1)x+2ay+3z=0 \\ (1-a)x+az=a^2+1 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a-1 & a & 2 \\ a-1 & 2a & 3 \\ 1-a & 0 & a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} a-1 & a & 2 & -1 \\ a-1 & 2a & 3 & 0 \\ 1-a & 0 & a & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a-1 & a & 2 \\ a-1 & 2a & 3 \\ 1-a & 0 & a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & 2 & 3 \\ 1-a & 0 & a \end{vmatrix}=a\cdot[2a(a-1)+3(1-a)-4(1-a)-a(a-1)]=$$

$$=a(2a^2-2a+3-3a-4+4a-a^2+a)=a(a^2-1)=a(a+1)(a-1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado}}$$

$$\underline{Para\ \ a=0}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Equivalente\ \ a\ \ M'=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3+3+2=2\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ \ a=1}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Equivalente\ \ a\ \ M'=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=6-2-8=-4\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a=0\\ a=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=8-4-4=0\\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-12-2+6+8=0\\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=-6-2+8=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-1\Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg.\Rightarrow\ Compatible\ \ indeterminado}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq -1\\ a\neq 1\end{Bmatrix}$, compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\ 0 & 2a & 3\\ a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{-2a+3(a^2+1)-4(a^2+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-2a-(a^2+1)}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{-2a-a^2-1}{(a+1)(a-1)}=\frac{-(a^2+2a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a+1}{1-a}}}=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a-1 & -1 & 2\\ a-1 & 0 & 3\\ 1-a & a^2+1 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & a^2+1 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2(a^2+1)+3-3(a^2+1)+a}{a(a+1)}=$$

$$=\frac{-(a^2+1)+3+a}{a(a+1)}=\frac{-a^2-1+3+a}{a(a+1)}=\frac{-a^2+a+2}{a(a+1)}=\frac{-(a-2)(a+1)}{a(a+1)}=\underline{\underline{\frac{2-a}{a}}}=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a-1 & a & -1\\ a-1 & 2a & 0\\ 1-a & 0 & a^2+1\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & a^2+1\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2a^2+2-2-a^2-1}{a+1}=\frac{a^2-1}{a+1}=\underline{\underline{a-1=z}}.$$

****

2º) Se considera la recta s que pasa por el punto P(0, 2, 1) y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 4y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$. Encuentra el punto de corte de r y s.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -4,\ 2)$.

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2i - j - 4k + k - 4i - 2j = -6i - 3j - 3k = (-6,\ -3,\ -3).$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 1)$.

El haz de los infinitos planos paralelos que son perpendiculares a la recta r tienen una expresión general de la forma $\alpha \equiv 2x + y + z + D = 0$.

El plano π perteneciente a α que contiene al punto P(0, 2, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ \\ P(0,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 0 + 2 + 1 + D = 0\ \ ;;\ \ D = -3\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0}.$$

El punto Q de corte del plano π con la recta r es la solución del sistema que determinan: $\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = -9 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9 - 6 - 12 - 9}{-4 - 4 - 1 - 8 - 2 + 1} = \frac{-18}{-18} = \underline{1 = x}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-9 - 3 - 18 - 6}{-18} = \frac{-36}{-18} = \underline{2 = y}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-12+18+9+3}{-18} = \frac{18}{-18} = \underline{-1 = z}\,.$$

El punto de corte del plano π con la recta r es Q(1, 2, -1).

La recta s pedida es la que pasa por los puntos P(0, 2, 1) y Q(1, 2, -1), por lo cual el punto pedido es Q.

El punto de corte de r y s es Q(1, 2, -1).

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula Rang (AB) y Rang (BA).

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1+0 & 2-1+1 \\ 0-1-0 & 0+1-2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=A \cdot B}$$

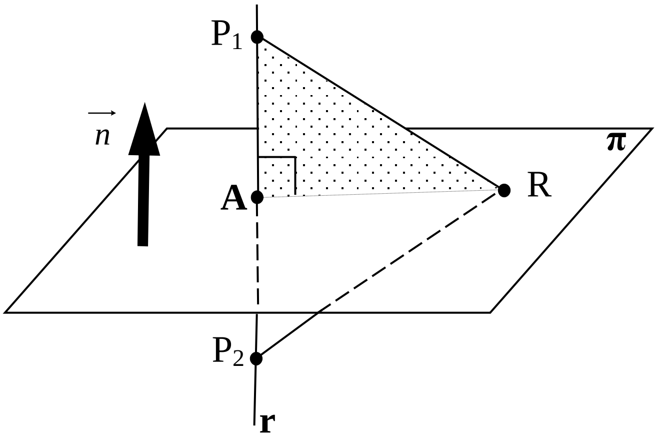
$$|A \cdot B|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Rang\;(AB)=1}}$$

$$B \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & -1+2 & 1-4 \\ -1+0 & 1+1 & -1-2 \\ 0+0 & -0+1 & 0-2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=B \cdot A}$$

$$|B \cdot A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+3+3-2=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Rang\;(BA)=2}}$$

****

2º) Dado el punto R(1, -1, 2), encuentra los puntos P_1 y P_2 pertenecientes a la recta r dada por la ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases}$ tales que PQR sea un triángulo equilátero.



El gráfico adjunto ilustra el proceso que se realiza a continuación.

El plano π es perpendicular a r por el punto R.

El vector normal del plano π es linealmente dependiente al vector director de la recta r.

Un vector director de la recta r es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ 2)$.

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2i+j+2k-k-2i-2j=-j+k=(0,\ -1,\ 1).$$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n}=(0,\ 1,\ -1)$.

El haz de los infinitos planos paralelos que son perpendiculares a la recta r tienen una expresión general de la forma $\alpha \equiv y-z+D=0$.

El plano π perteneciente a α que contiene al punto R(1, -1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv y-z+D=0 \\ R(1,\ -1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0\cdot 1+1\cdot(-1)-1\cdot 2+D=0\ ;;\ D=3 \Rightarrow \underline{\pi \equiv y-z+3=0}.$$

Para conocer cualquier punto genérico de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=4-\lambda \\ x+2y=6-2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-4+\lambda \\ x+2y=6-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=2-\lambda}\ ;;$$

$$x=4-\lambda-y=4-\lambda-2+\lambda=\underline{2=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Los puntos de r son de la forma $P(2,\ 2-\lambda,\ \lambda)$.

El punto A de corte de la recta r con el plano π es:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv y-z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2-\lambda)-\lambda+3=0 \ ;;\ 5-2\lambda=0 \ ;;\ \underline{\lambda=\frac{5}{2}} \Rightarrow \underline{A\left(2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)}.$$

Por condición del problema es $\overline{PR}=2\overline{AP}$:

$$\overline{PR}=\sqrt{(1-2)^2+(-1-2+\lambda)^2+(2-\lambda)^2}=\sqrt{1+9-6\lambda+\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2}=\underline{\sqrt{2\lambda^2-10\lambda+14}}$$

$$2\overline{AP}=2\sqrt{(2-2)^2+\left(2-\lambda+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2}=2\sqrt{0^2+\left(\frac{5}{2}-\lambda\right)^2+\left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2}=$$

$$=2\sqrt{\frac{25}{4}-5\lambda+\lambda^2+\lambda^2-5\lambda+\frac{25}{4}}=2\sqrt{2\lambda^2-10\lambda+\frac{50}{4}}=\underline{\sqrt{8\lambda^2-40\lambda+50}}$$

$$\overline{PR}=2\overline{AP} \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2-10\lambda+14}=\sqrt{8\lambda^2-40\lambda+50} \ ;;\ 2\lambda^2-10\lambda+14=8\lambda^2-40\lambda+50 \ ;;$$

$$6\lambda^2-30\lambda+36=0 \ ;;\ 3\lambda^2-15\lambda+18=0.$$

$$\lambda=\frac{15\pm\sqrt{225-216}}{6}=\frac{15\pm\sqrt{9}}{6}=\frac{15\pm 3}{6}=\frac{5\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1=2} \ ;;\ \underline{\lambda_2=3}$$

$$P(2,\ 2-\lambda,\ \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2,\ 0,\ 2)}} \\ \\ \lambda_2=3 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(2,\ -1,\ 3)}} \end{cases}$$

****

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Halla las integrales indefinidas: $I_1=\int\frac{2\,dx}{x^2-4}$ e $I_2=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$$I_1=2\cdot\int\frac{1}{x^2-4}\cdot dx=2\cdot\int\frac{dx}{(x-2)(x+2)}\Rightarrow\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(1-x)(1+x)}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}A+B=0\\2A-2B=1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}A+B=0\\A-B=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2A=\frac{1}{2}\ ;;\ \underline{A=\frac{1}{4}}\ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{4}}$$

$$I_1=2\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\right)\cdot dx=2\left(\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\cdot dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\cdot dx\right)=\frac{1}{2}M_1-\frac{1}{2}M_2=\underline{\frac{1}{2}(M_1-M_2)=I_1}$$

$$M_1=\int\frac{1}{x-2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2=t\\dx=dt\end{array}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{t}\cdot dt=\int\frac{1}{t}\cdot dt=L\,t=\underline{L|\,x-2\,|=M_1}$$

$$M_2=\int\frac{1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2=t\\dx=dt\end{array}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{t}\cdot dt=L\,t=\underline{L|\,x+2\,|=M_2}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de M_1 y M_2, queda:

$$I_1=\frac{1}{2}\left[L|\,x-2\,|-L|\,x+2\,|\right]+C=\frac{1}{2}\left[L|\,x-2\,|-L|\,x+2\,|\right]+C=\frac{1}{2}L\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

$$\underline{\underline{I_1=L\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}+C}}$$

$$I_2=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1+\sqrt{x}=t\rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\\\sqrt{x}=t-1\rightarrow dx=2(t-1)dt\end{array}\right\}\Rightarrow I_2=\int\frac{2(t-1)}{t}\cdot dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot dt=$$

$$=2\cdot(t-L\,t)+C=2\cdot\left[1+\sqrt{x}-L\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C$$

$$\underline{\underline{I_2=2\cdot\left[\sqrt{x}-L\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=x^{Lx}$, demuestra que existe $c\in(1,\ e)$ tal que f'(c) = 1. Menciona los resultados teóricos que utilices.

En este ejercicio tenemos que utilizar el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, también conocido como Teorema de Lagrange, que dice: "si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La función $f(x)=x^{Lx}$ es continua en $[1,\ e]$ y derivable en $(1,\ e)$ por lo cual le es aplicable en mencionado teorema en este intervalo.

$$f'(c)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{Le}-1^{L1}}{e-1}=\frac{e^{1}-1^{0}}{e-1}=\frac{e-1}{e-1}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f'(c)=1,\ \ c.q.d.}}.$$

****

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}$ se anula en algún punto del intervalo $(1,\ 3)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

$$f(x)=\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}=x^{\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow L[f(x)]=\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot Lx \ ;;$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot sen\frac{\pi x}{2}\cdot Lx+\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot Lx\cdot sen\frac{\pi x}{2}\right)\ ;;$$

$$\underline{f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot Lx\cdot sen\frac{\pi x}{2}\right)}$$

La función f'(x) es continua en su dominio, que es $(0,\ +\infty)$, por estar compuesta por sumas y productos de funciones continuas en el dominio de f'(x), por lo cual les es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Aplicándolo a la función f'(x) en el intervalo $(2,\ 3)$:

$$f'(2)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^{\cos\pi}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\pi-\frac{\pi}{2}\cdot L\,2\cdot sen\,\pi\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^{-1}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot L\,2\cdot 0\right)=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}<0$$

$$f'(3)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\cos\frac{3\pi}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot L\,3\cdot sen\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{0}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{\pi}{2}\cdot L\,3\cdot(-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi L3}{2}=\frac{\pi L3}{4}>0$$

<u>Lo anterior demuestra que lo pedido.</u>

****

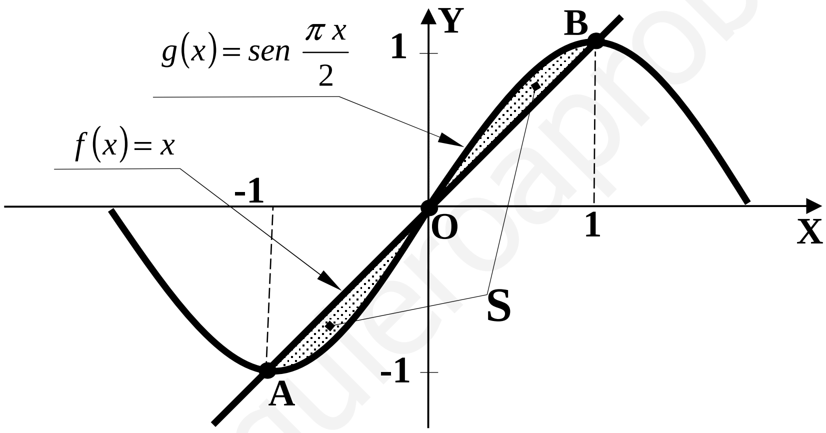
2º) Encuentra los tres puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=sen\frac{\pi x}{2}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

Los puntos de corte de las funciones se obtienen de la igualdad de ambas funciones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x=sen\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=0} \;;;\; \underline{x_3=1}.$$

Los puntos de corte son los siguientes: A(-1, -1), O(0, 0) y B(1, 1).

La representación gráfica de la situación se refleja en el gráfico, donde puede apreciarse la simetría que tienen con respecto al origen de ambas funciones por cumplirse que $f(-x)=-f(x)$ y $g(-x)=-g(x)$.



Observando la figura y teniendo en cuenta la simetría de las gráficas, teniendo en cuenta que:

$$I=\int sen\frac{\pi x}{2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\frac{\pi x}{2}=t \;;;\; \frac{\pi}{2}dx=dt \;;;\; dx=\frac{2}{\pi}dt\right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int sen\ t\cdot dt=\frac{2}{\pi}\cos t=\underline{\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}=I},$$

la superficie pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left(sen\frac{\pi x}{2}-x\right)\cdot dx=$$

$$=2\cdot\left[\frac{2}{\pi}\cdot sen\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\cdot\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot sen\frac{\pi}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-0\right]=2\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-1=\underline{\underline{\frac{4-\pi}{\pi}u^2=S}}$$

****