PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2010

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a+1)x+y+z=-1 \\ (-a-1)x-2z=2 \\ y+\left(a^2-a-1\right)z=-a+2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}=-a-1+2(a+1)-(-a-1)\left(a^2-a-1\right)=$$

$$=-a-1+2a+2+(a+1)\left(a^2-a-1\right)=(a+1)+(a+1)\left(a^2-a-1\right)=(a+1)\left(1+a^2-a-1\right)=$$

$$=a(a+1)(a-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=1}.$$

$$Para \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \; Rango \;\; M=Rango \;\; M'=3=n^o \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; \det er\min ado$$

$$Para \;\; a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1-2+2=1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=3}.$$

$$Para \;\; a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6+2+2-2=-4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \left\{ \begin{matrix} a=0 \\ a=-1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango \;\; M=2 \;\;;; \;\; Rango \; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para \;\; a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1 = C_2 + C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+4-2=0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=1 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \; M'=2 < n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Resolvemos para el caso de $\left\{ \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{matrix} \right\}$, compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -a+2 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)} = \frac{2-2(-a+2)-2-2(a^2-a-1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{2a-4-2a^2+2a+2}{a(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{-2a^2+4a-2}{a(a+1)(a-1)} = \frac{-2(a^2-2a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{-2(a-1)^2}{a(a+1)(a-1)} = \underline{\underline{\frac{-2(a-1)}{a(a+1)}}} = x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ -a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -a+2 & a^2-a-1 \end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{2(a+1)\left(a^2-a-1\right)+(-a-1)(-a+2)+2(a+1)(-a+2)+(-a-1)\left(a^2-a-1\right)}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{\left(a^2-a-1\right)(2a+2-a-1)+(-a+2)(-a-1+2a+2)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{\left(a^2-a-1\right)(a+1)+(-a+2)(a+1)}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{(a+1)\left(a^2-a-1-a+2\right)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{\left(a^2-2a+1\right)}{a(a-1)}=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a-1}{a}=y}}\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -a+2 \end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{-(-a-1)-2(a+1)-(-a-1)(-a+2)}{a(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{(a+1)-2(a+1)+(a+1)(-a+2)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{(a+1)(1-2-a+2)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{1-a}{a(a-1)}=\underline{\underline{\frac{-1}{a}=z}}\,.$$

Resolvemos para el caso de a = 1: compatible indeterminado. El sistema resulta $\begin{cases} 2x+y+z=-1 \\ -2x-2z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=-1 \\ x+z=-1 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\underline{Solución\ \ para\ \ a=1}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\left.\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\right\}\ \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano dado por su ecuación general $\pi \equiv x - 2y + z - 4 = 0$ y corta perpendicularmente a la recta dada por ecuaciones implícitas $r \equiv \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$.

El punto de intersección del plano π y la recta r es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 4 \\ x - y - z = -1 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 2y = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -3 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = -2 \;\;;;\;\; \underline{y = -1} \;\;;;\;\; 2x - y = 1 \;\;;;$$

$$2x + 1 = 1 \Rightarrow \underline{x = 0} \;\;;;\;\; x - 2y + z = 4 \;\;;;\;\; z = 4 - x + 2y = 4 - 0 - 2 = \underline{2 = z} \Rightarrow \underline{P(0,\ -1,\ 2)}.$$

Un vector director de la recta r puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que se obtiene al multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (3,\ -1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 3j - k + 3k - i - j = -2i - 4j + 2k = (-2,\ -4,\ 2).$$

Podemos tomar como vector director de r al vector $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ -1)$.

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x + 2y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano π' que contiene a P(0, -1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x + 2y - z + D = 0 \\ P(0,\ -1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 2 - 2 + D = 0 \;\;;;\;\; \underline{D = 4} \Rightarrow \underline{\pi' \equiv x + 2y - z + 4 = 0}.$$

La recta s pedida es la intersección de los planos π y π': $s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$. Su expresión por unas ecuaciones continuas es:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 0} \;\;;;\;\; \underline{y = \lambda} \;\;;;\;\; \underline{z = 4 + 2\lambda} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 4}{-2}}}.$$

****

3º) Calcula los límites: a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$. b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

----

a)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} sen\ \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos\ \frac{\pi}{2}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\ x\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{4}\cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\ x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)}{x-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\cos\ \frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2} sen\ \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{0\cdot sen\ \frac{\pi}{2}}{0} = -\frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left[-sen\ x\cdot sen\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)\right]+\cos\ x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cos\ x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} sen\ x\right)\right]}{-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left\{\left[-sen\ \frac{\pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2} sen\ \frac{\pi}{2}\right)\right]+\cos\ \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cos\ \frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} sen\ \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}+0\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right) = \infty-\infty \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\sqrt{L(3^x+x)+L(x^2-10x+20)}$ demuestra que existe un valor $\alpha \in (1,\ 2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a aplicar el teorema de Rolle, que se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(c) = 0.

La función $f(x)=\sqrt{L(3^x+x)+L(x^2-10x+20)}$ es continua en el intervalo [1, 2] y derivable en el intervalo (1, 2), por lo cual le es aplicable el teorema de Rolle.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{L(3^1+1)+L(1^2-10+20)}=\sqrt{L4+L11}=\sqrt{L44} \\ \\ f(2)=\sqrt{L(3^2+2)+L(2^2-10\cdot 2+20)}\sqrt{L11+L4}=\sqrt{L44} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(1)=f(2)}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)\ \ tiene\ \ un\ \ valor\ \ a\in(1,\ 2)\ \ tal\ \ que\ \ f'(a)=0,\ \ c.\ q.\ d.}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra la matriz X que cumple que $A \cdot X \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando en $A \cdot X \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1}, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \;;\; I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \;;\;$$

$$\underline{X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}} .$$

Hallamos las matrices inversas de A y B aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$(B/I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de A^{-1} y B^{-1} en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 6-1 \\ 1+0 & 3-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+5 & 2-10 \\ 0+2 & 1-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = X}} .$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(1, 1, 1) y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$.

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las rectas r y s, para lo cual, expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=1-\lambda \\ 2y+z=-2\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -y-z=-1+\lambda \\ 2y+z=-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1-\lambda} \;;;$$

$$y+z=1-\lambda \;;;\; z=1-\lambda-y=1-\lambda+1+\lambda=\underline{2=z} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=2 \end{cases}}.$$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_R} = (1,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_S} = (2,\ 1,\ 1)$, que son linealmente independientes, lo que significa que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de r, por ejemplo A(0, -1, 2), y como extremo un punto de s, por ejemplo B(0, 2, -1):

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ -1) - (0,\ -1,\ 2) = (0,\ 3,\ -3).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_R},\ \overrightarrow{v_S},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean linealmente independientes o no las rectas se cruzan o se cortan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_R},\ \overrightarrow{v_S},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son linealmente independientes cuando su rango es 3:

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_R},\ \overrightarrow{v_S},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -3-3-6=-12 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{v_R},\ \overrightarrow{v_S},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3}.$$

Lo anterior indica que las rectas r y s se cortan.

Ahora vamos a determinar dos planos π y π’ que contengan al punto P y a las rectas r y s, respectivamente.

Los puntos A(0, -1, 2) y P(1, 1, 1) determinan el vector $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AP} = (1,\ 2,\ -1)$.

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_R},\ \overrightarrow{m}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; x+2(z-2)+(z-2)+(y+1)=0 \;;;$$

$$x+3(z-2)+(y+1)=0 \;\;;;\;\; x+3z-6+y+1=0 \;\Rightarrow\; \underline{\pi \equiv x+y+3z-5=0}.$$

Los puntos B(0, 2, -1) y P(1, 1, 1) determinan el vector $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{BP}=(1,\ -1,\ 2)$.

$$\pi'\left(B;\ \overrightarrow{v_S},\ \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;$$

$$2x+(y-2)-2(z+1)-(z+1)+x-4(y-2)=0 \;\;;;\;\; 3x-3(y-2)-3(z+1)=0 \;\;;;$$

$$x-(y-2)-(z+1)=0 \;\;;;\;\; x-y+2-z-1=0 \;\Rightarrow\; \underline{\pi' \equiv x-y-z+1=0}.$$

La recta t es la que determinan los planos π y π' al cortarse: $t \equiv \begin{cases} x+y+3z-5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$.

La expresión de t por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x+y+3z-5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5-3\lambda \\ x-y=-1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=4-2\lambda \;\;;;\;\; \underline{x=2-\lambda} \;\;;;$$

$$x+y=5-3\lambda \;\;;;\;\; y=5-3\lambda-x=5-3\lambda-2+\lambda=\underline{3-2\lambda=y} \;\Rightarrow\; \underline{t \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \;\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}}}$$

****

3º) Demuestra que la función $f(x)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)}$ vale $\frac{1}{2}$ en algún punto del intervalo $(0,\ 1)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a utilizar el teorema del valor intermedio, (que es una generalización del teorema de Bolzano), que se puede enunciar de la siguiente forma:

"Sea f(x) una función continua en un intervalo [a, b] y supongamos que $f(a)<f(b)$. Entonces para cada μ tal que $f(a)<\mu<f(b)$, existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=\mu$". (La misma conclusión se obtiene para el caso de f(b) < f(a)).

La función $f(x)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)}$ es continua en el intervalo [0, 1], por lo cual, le es aplicable el teorema del valor intermedio.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^0\right)}=\sqrt{sen\ \frac{\pi}{2}}=\sqrt{1}=1>\frac{1}{2} \\ \\ f(1)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^1\right)}=\sqrt{sen\ \pi}=0<\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\exists c\in(0,\ 1)\ \ tal\ \ que\ \ f(c)=\frac{1}{2},\ \ c.\ q.\ d}}$$

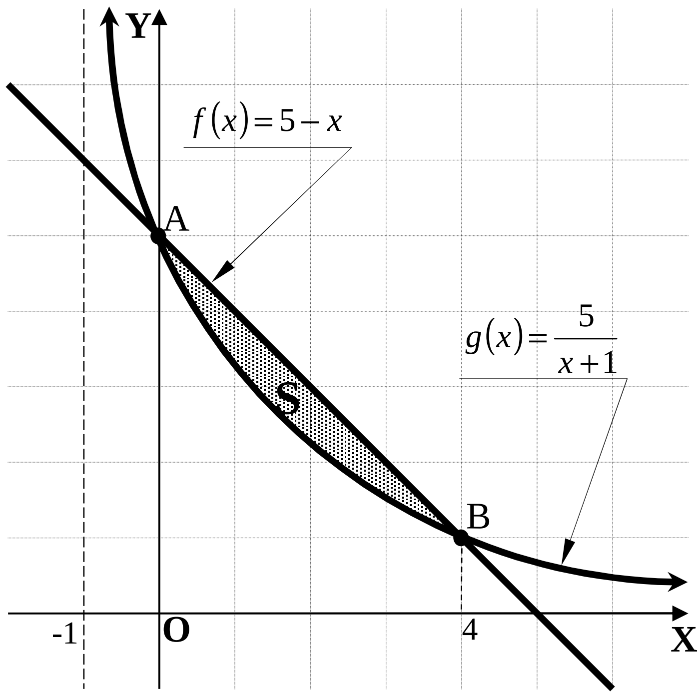
****

4º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=5-x$ y $g(x)=\frac{5}{x+1}$.

Los puntos de corte de las dos funciones son los siguientes:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 5-x=\frac{5}{x+1} \;\;;;\;\; 5x+5-x^2-x=5 \;\;;;\;\; x^2-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \rightarrow \underline{A(0,\ 5)} \\ \\ x_2=4 \rightarrow \underline{B(4,\ 1)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la que indica la figura.



Como se aprecia en la figura, las ordenadas de f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de g(x) en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^4 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^4\left(5-x-\frac{5}{x+1}\right)\cdot dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-5L(x+1)\right]_0^4=$$

$$=\left[5\cdot 4-\frac{4^2}{2}-5L(4+1)\right]-[0-0-5L(0+1)]=20-8-5L5+5L1=12-5L5\cong \underline{\underline{3'95\ u^2=S}}.$$

****