

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****SEPTIEMBRE - 2010**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α

$$\text{y resuélvelo en los casos en que es compatible: } \begin{cases} (a^2 + a)x + (2a + 1)y + az = 1 \\ (a^2 + a)x + (3a + 3)y + (a + 1)z = 2. \\ (a + 2)y - az = a + 2 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a^2 + a & 2a + 1 & a \\ a^2 + a & 3a + 3 & a + 1 \\ 0 & a + 2 & -a \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} a^2 + a & 2a + 1 & a & 1 \\ a^2 + a & 3a + 3 & a + 1 & 2 \\ 0 & a + 2 & -a & a + 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} a^2 + a & 2a + 1 & a \\ a^2 + a & 3a + 3 & a + 1 \\ 0 & a + 2 & -a \end{vmatrix} = (a^2 + a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a + 1 & a \\ 1 & 3a + 3 & a + 1 \\ 0 & a + 2 & -a \end{vmatrix} = (a^2 + a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a + 1 & a \\ 0 & a + 2 & 1 \\ 0 & a + 2 & -a \end{vmatrix} = \\ &= (a^2 + a) \begin{vmatrix} a + 2 & 1 \\ a + 2 & -a \end{vmatrix} = a(a + 1)(a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = a(a + 1)(a + 2)(-a - 1) = -a(a + 1)^2(a + 2) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{a_1 = 0} ; ; \underline{a_2 = a_3 = -1} ; ; \underline{a_4 = -2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible det er min ado}$$

$$\text{Para } a=0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2.}$$

Para $a=0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

$$\text{Para } a=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rango } M = 1 \\ \text{Rango } M' = 2 \end{cases}$$

Para $a=-1 \Rightarrow \text{Rango } M = 1 ; ; \text{Rango } M' = 2 \Rightarrow \text{Incompatible}$

$$\text{Para } a=-2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1 = -\frac{2}{3}C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(4-2) = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3.}$$

Para $a=-2 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 ; ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

Resolvemos para el caso de $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{cases}$, (sistema compatible determinado), mediante

la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & a \\ 2 & 3a+3 & a+1 \\ a+2 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-a(3a+3) + 2a(a+2) + (a+1)(a+2)(2a+1) - a(a+2)(3a+3) - (a+1)(a+2) + 2a(2a+1)}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-a(3a+3)(1+a+2) + (a+2)(2a-a-1) + (2a+1)(a^2+3a+2+2a)}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-3a(a+1)(a+3) + (a+2)(a-1) + (2a+1)(a^2+5a+2)}{-a(a+1)^2(a+2)} = \\
&= \frac{-3a(a^2+4a+3) + a^2 - a + 2a - 2 + 2a^3 + 10a^2 + 4a + a^2 + 5a + 2}{-a(a+1)^2(a+2)} = \\
&= \frac{-3a^3 - 12a^2 - 9a + 2a^3 + 12a^2 + 10a}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{-a^3 + a}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{-a(a^2-1)}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a+2)} = \\
&= \frac{a-1}{(a+1)(a+2)} = x.
\end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a^2+a & 1 & a \\ a^2+a & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{(a^2+a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{a(a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2a + a(a+2) - (a+1)(a+2) + a}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-a + a^2 + 2a - (a^2 + 3a + 2)}{-(a+1)(a+2)} = \\
&= \frac{a^2 + a - a^2 - 3a - 2}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2a - 2}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)(a+2)} = \frac{2}{a+2} = y.
\end{aligned}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & 1 \\ a^2+a & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{(a^2+a) \begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{a(a+1) \begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-(a+1)(a+2)} = \frac{(3a+3)(a+2) + (a+2) - 2(a+2) - (a+2)(2a+1)}{-(a+1)(a+2)} = \\
&= \frac{(a+2)(3a+3+1-2-2a-1)}{-(a+1)(a+2)} = \frac{a+1}{-(a+1)} = \underline{\underline{-1}} = z.
\end{aligned}$$

Resolvemos para el caso de $\alpha = 0$; el sistema resulta $\begin{cases} y = 1 \\ 3y + z = 2, \\ 2y = 2 \end{cases}$, equivalente al

sistema $\begin{cases} y = 1 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}}}$$

2º) Dados los puntos P(2, 1, 1) y Q(1, 2, -1), encuentra los puntos R y S de la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{0}$ que cumple que PQR y PQS son triángulos equiláteros.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Los puntos genéricos de la recta r tienen por expresión: $R(-2 + \lambda, -2 + \lambda, 0)$.

La distancia entre los puntos P y Q es la siguiente:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} = \underline{\underline{\overline{PQ}}}.$$

Por condición del ejercicio es $\overline{PR} = \overline{PS} = \overline{PQ} = \sqrt{6}$

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = \sqrt{(-2 + \lambda - 2)^2 + (-2 + \lambda - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{6} \quad ; ; \quad \sqrt{(\lambda - 4)^2 + (\lambda - 3)^2 + 1} = \sqrt{6}$$

$$(\lambda - 4)^2 + (\lambda - 3)^2 + 1 = 6 \quad ; ; \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 5 \quad ; ; \quad 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 = 0 \quad ; ;$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \quad ; ; \quad \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 2}} \quad ; ; \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 5}}.$$

Para $\lambda = 2 \Rightarrow R(-2 + 2, -2 + 2, 0) \Rightarrow \underline{\underline{R(0, 0, 0)}}$.

Para $\lambda = 5 \Rightarrow S(-2 + 5, -2 + 5, 0) \Rightarrow \underline{\underline{S(3, 3, 0)}}$.

3º) Halla la derivada y su valor en el punto $x = 1$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{x+2^x}$

b) $g(x) = \text{arc tag} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)$.

a)

$f(x) = x^{x+2^x}$. Tomando logaritmos neperianos: $L[f(x)] = L x^{x+2^x} = (x + 2^x) L x$.

Derivando ahora, teniendo en cuenta que $f(x) = y \Rightarrow f'(x) = \frac{y'}{y}$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x + 2^x)' \cdot Lx + (x + 2^x) \cdot \frac{1}{x}. \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que si $y = x + 2^x = x + u \Rightarrow y' = 1 + u'$. (**)

$$u = 2^x \Rightarrow Lu = L2^x = xL2 \quad ; ; \quad \frac{u'}{u} = 1 \cdot L2 = L2 \quad ; ; \quad u' = uL2 = \underline{2^x L2 = u'}$$

Sustituyendo en (**) el valor obtenido de u' : $y' = 1 + 2^x L2$.

Sustituyendo en valor obtenido en (**) en la expresión (*), resulta finalmente:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1 + 2^x L2) \cdot Lx + (x + 2^x) \cdot \frac{1}{x} \quad ; ; \quad f'(x) = f(x) \cdot \left[(1 + 2^x L2) \cdot Lx + (x + 2^x) \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$\underline{\underline{f'(x) = x^{x+2^x} \cdot \left[(1 + 2^x L2) \cdot Lx + (x + 2^x) \cdot \frac{1}{x} \right]}}$$

Para $x = 1$ es:

$$f'(1) = 1^{1+2^1} \cdot \left[(1 + 2^1 L2) \cdot L1 + (1 + 2^1) \cdot \frac{1}{1} \right] = 1 \cdot [(1 + 2L2) \cdot 0 + (1 + 2) \cdot 1] = 3.$$

$$\underline{\underline{f'(1) = 3}}$$

b)

$$g(x) = \text{arc tag} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)$$

Teniendo en cuenta que si $\begin{cases} f(x) = \text{arc tag } u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} \\ h(x) = \cos z \Rightarrow h'(x) = -z' \cdot \text{sen } z \end{cases}$, la derivada pedida

es la siguiente:

$$g'(x) = \frac{-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{1 + \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\pi x}{2}} = g'(x).$$

Para $x = 1$ es: $g'(1) = -\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}} = -\frac{\frac{\pi}{2} \cdot 1}{1 + 0^2} = -\frac{\pi}{2}.$

$$\underline{\underline{g'(1) = -\frac{\pi}{2}}}$$

4º) Dada la función $f(x) = L\left(3 + x + \operatorname{sen} \frac{\pi x^3}{x^2 + x + 2}\right)$ demuestra que existe un valor $c \in (-1, 2)$ tal que $f(c) = 1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a utilizar el teorema del valor intermedio, (que es una generalización del teorema de Bolzano), que se puede enunciar de la siguiente forma:

“Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces para cada μ tal que $f(a) < \mu < f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \mu$ ”. (La misma conclusión se obtiene para el caso de $f(b) < f(a)$).

La función $f(x) = L\left(3 + x + \operatorname{sen} \frac{\pi x^3}{x^2 + x + 2}\right)$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, por lo cual, le es aplicable el teorema del valor intermedio.

$$f(-1) = L\left[3 - 1 + \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot (-1)^3}{(-1)^2 - 1 + 2}\right] = L\left(2 + \operatorname{sen} \frac{-\pi}{1+1}\right) = L\left(2 + \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2}\right) = L(2 - 1) =$$

$$= L1 = \underline{0} = f(-1).$$

$$f(2) = L\left[3 + 2 + \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot 2^3}{2^2 + 2 + 2}\right] = L\left(5 + \operatorname{sen} \frac{8\pi}{8}\right) = L(5 + \operatorname{sen} \pi) = L(5 + 0) = L5 \cong$$

$$\cong \underline{1'61} = f(2).$$

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\exists c \in (-1, 2) \text{ tal que } f(c) = 1, \text{ c. q. d}}}$$

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de $A \cdot B$ y el de $A + B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+0 & 0+3-6 & 0-0+3 \\ 0+2-0 & 0-3+4 & 0+0-2 \\ 0+4-0 & 0-6+4 & 0+0-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = A \cdot B.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8+4) = \underline{\underline{-12}}.$$

$$\underline{\underline{|A \cdot B| = -12}}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A + B.$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+2) = \underline{\underline{4}}.$$

$$\underline{\underline{|A + B| = 4}}$$

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{4}$.

El procedimiento que se va a utilizar para hallar la ecuación de la recta t requiere el conocimiento de un punto y un vector director de cada una de las rectas, para lo cual expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 - \lambda \\ x - y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 9 - 3\lambda \quad ; ; \quad \underline{x = 3 - \lambda} \quad ; ;$$

$$y = x - 3 + 2\lambda = 3 - \lambda - 3 + 2\lambda = \underline{\lambda = y} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} .$$

1.- Consideramos los puntos $A \in r$ y $B \in s$: $A(3, 0, 0)$ y $B(-1, -2, -2)$.

2.- Unos vectores directores de las rectas r y s son: $\vec{v}_r = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, 4)$.

3.- Obtenemos un vector \vec{w} , perpendicular a \vec{v}_r y \vec{v}_s :

$$\vec{w}' = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4i + 2j - k - 2k - i + 4j = 3i + 6j - 3k \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, 2, -1)} .$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2 , de la forma siguiente:

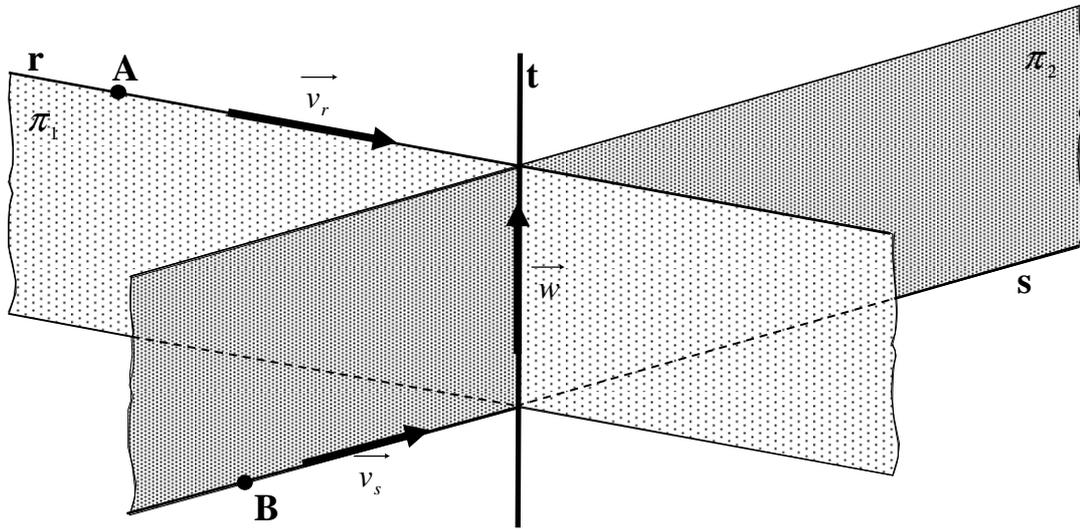
$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -(x-3) + y - 2z - z - 2(x-3) - y = 0 \quad ; ;$$

$$-3(x-3) - 3z = 0 \quad ; ; \quad x - 3 + z = 0 \quad ; ; \quad \underline{\pi_1 \equiv x + z - 3 = 0} .$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$-(x+1) + 4(y+2) + 4(z+2) - (z+2) - 8(x+1) + 2(y+2) = 0 \quad ; ; \quad -9(x+1) + 6(y+2) + 3(z+2) = 0 \quad ; ;$$

$$3(x+1) - 2(y+2) - (z+2) = 0 \quad ; ; \quad 3x + 3 - 2y - 4 - z - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv 3x - 2y - z - 3 = 0} .$$



La recta t es la que determinan los planos π_1 y π_2 : $t \equiv \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

La expresión de t por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 3x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ; \ ; \ \underline{x = 3 - \lambda} \ ; \ ; \ 3(3 - \lambda) - 2y - \lambda - 3 = 0 \ ; \ ;$$

$$2y = 9 - 3\lambda - \lambda - 3 = 6 - 4\lambda \ ; \ ; \ \underline{y = 3 - 2\lambda} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}}}$$

3º) Dada la función $f(x) = \text{sen}(\pi 2^x) + \cos(\pi x)$ demuestra que existe un valor $c \in (-1, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{3}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$$f(-1) = \text{sen}(\pi 2^{-1}) + \cos(-\pi) = \text{sen} \frac{\pi}{2} + \cos(-\pi) = 1 + (-1) = \underline{0}.$$

$$f(2) = \text{sen}(\pi 2^2) + \cos(2\pi) = \text{sen}(4\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = \underline{1}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$, a la función $f(x)$ le es aplicable el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La función $f(x) = \text{sen}(\pi 2^x) + \cos(\pi x)$ es continua y derivable en su dominio, que es \mathbb{R} , por lo cual se le puede aplicar el mencionado teorema a cualquier intervalo finito considerado.

Considerando el intervalo dado, $(-1, 2)$, se cumple que: $f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$, como hemos visto anteriormente.

4º) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = \text{sen}(\pi x)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Teniendo en cuenta que las raíces de la función $g(x) = \text{sen}(\pi x)$ son el conjunto de los números enteros y que las raíces de $f(x) = x^3 - x$ son $-1, 0$ y 1 , sus puntos de corte son los siguientes: A(-1, 0), O(0, 0) y B(1, 0).

Teniendo en cuenta que las dos funciones son simétricas con respecto al origen por cumplirse que $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$, el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \left| \int_0^1 [(x^3 - x) - \text{sen}(\pi x)] \right| = 2 \cdot \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x) \right]_0^1 \right| = \\
 &= 2 \left| \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos \pi \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos 0 \right) \right| = 2 \left| \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot (-1) \right] - \left(0 - 0 + \frac{1}{\pi} \cdot 1 \right) \right| = \\
 &= 2 \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right| = 2 \left| \frac{1-2}{4} - \frac{2}{\pi} \right| = 2 \left| -\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi} \right| = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \right) = 2 \cdot \frac{\pi+8}{4\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi+8}{2\pi} u^2 = S}}.
 \end{aligned}$$
