

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JULIO – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ (a^2 - a - 2)x - y - 3z = -1 \\ (a^2 - a - 2)x + (a^2 - 2a)z = 2 - a \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2 - a - 2 & -1 & -3 \\ a^2 - a - 2 & 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ a^2 - a - 2 & -1 & -3 & -1 \\ a^2 - a - 2 & 0 & a^2 - 2a & 2 - a \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro real α es el siguiente:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2 - a - 2 & -1 & -3 \\ a^2 - a - 2 & 0 & a^2 - 2a \end{vmatrix} = (a^2 - a - 2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & a^2 - 2a \end{vmatrix} = \\ &= (a^2 - a - 2) \cdot [-3 + 3 - (a^2 - 2a)] = (a^2 - a - 2) \cdot (2a - a^2) = (a + 1)(a - 2)a(2 - a) = \\ &= -a(a + 1)(a - 2)^2 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \;; \; \underline{a_2 = -1} \;; \; \underline{a_3 = 2}. \end{aligned}$$

$$\text{Aclaración: } a^2 - a - 2 = 0 \;; \; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -1 \;; \; a_2 = 2 \Rightarrow \underline{(a^2 - a - 2) = (a + 1)(a - 2)}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } a=0 \text{ ez } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \;; \text{Rango } A' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}}}$$

$$\text{Para } a=-1 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 2}.$$

$$\text{Para } a=2 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$$

Resolvemos los casos de compatibilidad, primero cuando $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{cases}$ mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2-a & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2} = \frac{0}{-a(a+1)(a-2)^2} = \underline{\underline{0}} = x \quad \{F_2 = -F_1\}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 \\ a^2-a-2 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2} = \frac{(a+1)(a-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a-2)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a-2)} = \frac{3(3-a)-3-(a^2-2a)}{-a(a-2)} = \frac{9-3a-3-a^2+2a}{-a(a-2)} = \frac{-a^2-a+6}{-a(a-2)} = \frac{a^2+a-6}{a(a-2)} =$$

$$= \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-2)} = \frac{a+3}{a} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2 - a - 2 & -1 & -1 \\ a^2 - a - 2 & 0 & 2 - a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2} = \frac{(a+1)(a-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 - a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 - a \end{vmatrix}}{-a(a-2)} =$$

$$= \frac{-1+1-(2-a)}{-a(a-2)} = \frac{a-2}{-a(a-2)} = -\frac{1}{a} = z.$$

Resolvemos para $\alpha = -1$; el sistema resulta $\begin{cases} y+3z=1 \\ -y-3z=-1, \\ 3z=3 \end{cases}$, que es compatible inde-

terminado y cuya solución es:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=m \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}, \forall \lambda, m \in R$$

Resolvemos para $\alpha = 2$; el sistema resulta $\begin{cases} y+3z=1 \\ -y-3z=-1, \\ 0=0 \end{cases}$, equivalente al sistema de

una ecuación con dos incógnitas $\{y+3z=1$, cuya solución es:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=m \\ y=1-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \forall \lambda, m \in R$$

2º) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+3y-2z-2=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+3y-2z-2=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=2+2\lambda \\ x-y=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=2+2\lambda \\ 3x-3y=6\lambda \end{cases} \Rightarrow 6x=2+8\lambda ;;$$

$$3x=1+4\lambda ;; \underline{x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda} ;; y=x-2\lambda=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda-2\lambda=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda=y \Rightarrow r = \begin{cases} x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ $\vec{u}=(4, -2, 3)$.

Un vector director de s es $\vec{v}=(1, 2, 2)$.

El plano π , por contener a r , tiene como vector director a $\vec{u}=(4, -2, 3)$ y contiene al punto $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ y, por ser paralelo a s , tiene como vector director a $\vec{v}=(1, 2, 2)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 ;; \begin{vmatrix} 3x-1 & 3y-1 & 3z \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 ::$$

$$-4(3x-1)+3(3y-1)+24z+6z-6(3x-1)-8(3y-1)=0 ;; -10(3x-1)-5(3y-1)+30z=0 ;;$$

$$2(3x-1)+(3y-1)-6z=0 ;; 6x-2+3y-1-6z=0 ;; 6x+3y-6z-3=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0}}$$

3º) Dada la función $f(x) = x^{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 4$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Teniendo en cuenta que $x^2 - 4x + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es \mathbb{R} , por consiguiente lo será en cualquier intervalo real que se considere.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice: si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando el intervalo $(1, 3)$ y sabiendo que $f(1) = 1^{\sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 + 7}} = 1^{\sqrt{4}} = 1^2 = 1 = \underline{f(1)}$ y que $f(3) = 3^{\sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 + 7}} = 3^{\sqrt{4}} = 3^2 = 9 = \underline{f(3)}$, podemos establecer que:

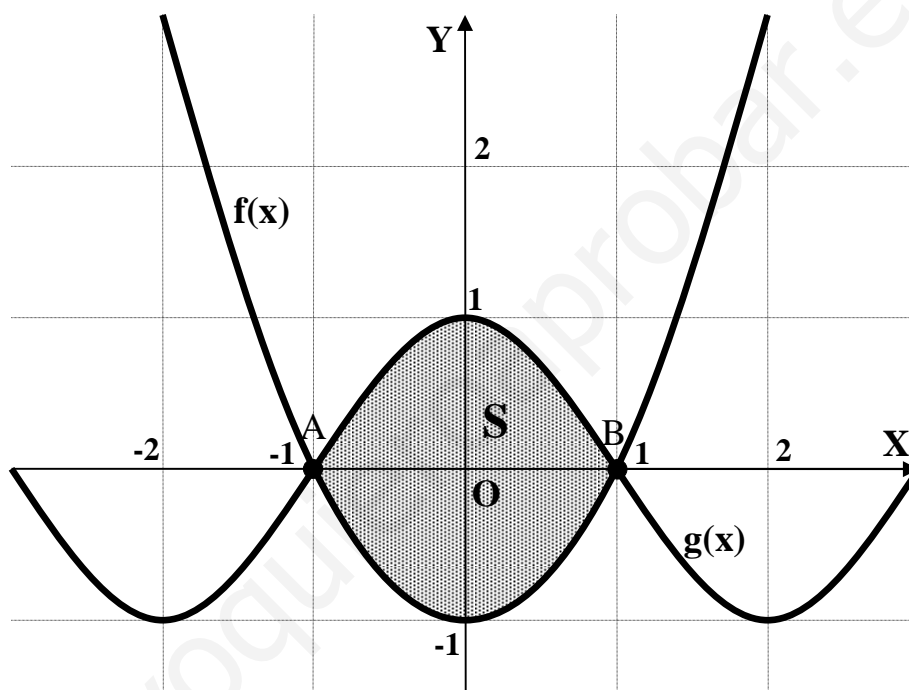
$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Lo anterior demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 4$.

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 1 = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Para $x = \pm 1$ resulta $f(x) = g(x) = 0$, de donde resultan los dos puntos de corte, que son $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.



La gráfica ilustra de la situación de ambas funciones y del recinto cuya superficie tenemos que calcular.

Ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$, lo que facilita el cálculo de la superficie que encierran.

Todas las ordenadas de la función $g(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$, por lo que el área pedida es:

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (x^2 - 1) \right] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 \left[1 - x^2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \cdot dx = \\
 &= 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2) \cdot dx + 2 \cdot \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2I = 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 \right] + 2I = \underline{\underline{\frac{4}{3} + 2I}} = S. \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{\pi} dt \end{array} \middle| \begin{array}{l} x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [\text{sen } t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{\pi} = \underline{\underline{I}}.$$

Sustituyendo el valor de I en la expresión (*), queda:

$$S = \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} = \frac{4\pi + 12}{3\pi} = \underline{\underline{\frac{4(\pi + 3)}{3\pi} u^2}} = S$$

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula $|A \cdot B|$ y $|B \cdot A|$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+1 & 0+1+2 & 0+0-1 \\ 0-1+2 & 0-1+4 & 0-0-2 \\ 0+0+2 & 0+0+4 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A \cdot B.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -(24 + 4 + 12 - 6 - 32 - 6) = -(40 - 44) = 4 = \underline{\underline{|A \cdot B|}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 & 2-0+0 & 2+0+0 \\ 1+0+0 & 1-1+0 & 1+2+0 \\ 1+0-0 & 1-2-0 & 1+4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 6 - 6 = 4 = \underline{\underline{|B \cdot A|}}.$$

Las soluciones son lógicas por lo siguiente:

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, o sea: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$.

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$, sabiendo además que cada punto de r equidista de los puntos $P(-2, 1, 3)$ y $Q(0, -1, 1)$.

El punto medio de $P(-2, 1, 3)$ y $Q(0, -1, 1)$ es $M(-1, 0, 2)$.

Los puntos $P(-2, 1, 3)$ y $Q(0, -1, 1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, -1, 1) - (-2, 1, 3) = (2, -2, -2).$$

Se llama plano mediatriz de un segmento de extremos A y B al plano que pasa por su punto medio y es perpendicular a la recta que pasa por A y B.

El plano μ , mediatriz de $P(-2, 1, 3)$ y $Q(0, -1, 1)$, es el que tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, -2)$ y que contiene al punto $M(-1, 0, 2)$:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x - y - z + D = 0 \\ M(-1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - 0 - 2 + D = 0 \;; \; D = 3 \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - y - z + 3 = 0}.$$

El punto R de corte de la recta s con el plano μ es la solución del sistema que determinan:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sumando la segunda ecuación a las otras dos resulta:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \;; \; \left. \begin{array}{l} -x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1 = 0 \;; \; x = -1 \;; \; \underline{y = 3} \;;$$

$$x - y - z + 3 = 0 \;; \; -1 - 3 - z + 3 = 0 \;; \; \underline{z = -1} \Rightarrow \underline{R(-1, 3, -1)}.$$

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - j + 4k - k + 2i - 2j = 3i - 3j + 3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (1, -1, 1)}.$$

El haz de planos α perpendiculares a la recta r es $\alpha \equiv x - y + z + D = 0$.

El plano ρ perteneciente al haz de planos α y que contiene al punto $R(-1, 3, -1)$ es

el que satisface su ecuación:

$$-1-3-1+D=0 \rightarrow D=5 \Rightarrow \underline{\rho \equiv x-y+z+5=0}.$$

La recta pedida r es la que determinan los planos μ y ρ : $r \equiv \begin{cases} x-y-z+3=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z+3=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} x-z=-3+\lambda \\ x+z=-5+\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x=-8+2\lambda \;; \; \underline{x=-4+\lambda} \;;$$

$$\begin{cases} -x+z=3-\lambda \\ x+z=-5+\lambda \end{cases} \Rightarrow 2z=-2 \;; \; \underline{z=-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-4+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}}}$$

3º) Halla las integrales indefinidas $I_1 = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ e $I_2 = \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx$.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot dx}{(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})} = \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot dx}{x^2 - (\sqrt{x})^2} = \int \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot dx}{x^2 - x} = \int \frac{x \cdot dx}{x^2 - x} - \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x^2 - x} = \\
 &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x^2 - x} = \underline{L|x-1| - A = I_1} \quad (*) \\
 A &= \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x(x-1)} = \int \frac{(\sqrt{x})^2 \cdot dx}{x(x-1)\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow x-1 = t^2 - 1 \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int \frac{2dt}{t^2 - 1} = \int \frac{2dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} \right) \cdot dt = \int \frac{At - A + Bt + B}{t^2 - 1} \cdot dt = \int \frac{(A+B)t + (-A+B)}{t^2 - 1} \cdot dt \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} B=1 \\ A=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt = L|t-1| - L|t+1| = L \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = L \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| = \\
 &= L \left| \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right| = L \left| \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1} \right| = \underline{L|x-2\sqrt{x}+1| - L|x-1| = A}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= L|x-1| - L|x-2\sqrt{x}+1| + L|x-1| = 2L|x-1| - L|x-2\sqrt{x}+1| + C = \\
 I_1 &= L|x-1| - L|x-2\sqrt{x}+1| + L|x-1| = 2L|x-1| - L|x-2\sqrt{x}+1| + C = \\
 &= L \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right)^2 + C = L \left[\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right]^2 + C = L \left[\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \right]^2 + C = \underline{\underline{L(\sqrt{x}+1)^2 + C = I_1}}.
 \end{aligned}$$

* * * * *

La integral $I_2 = \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx$ tiene que resolverse por el método de “por partes”, basado en la diferencial de un producto de funciones: $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Sabiendo que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral dada:

$$I_2 = \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 2x \cdot dx = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + M = I_2. \quad (*)$$

$$M = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) - \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos(2x) =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) = M.$$

Sustituyendo en valor obtenido de M en el valor de I_2 (*), queda:

$$I_2 = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C = \frac{1}{4} (1 - 2x^2) \cos(2x) + \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + C.$$

$$\underline{\underline{I_2 = \int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{1}{4} [(1 - 2x^2) \cos(2x) + 2x \cdot \operatorname{sen}(2x)] + C}}$$

4º) Calcula el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo $[-1, 2]$, de la función $f(x) = L(x^2 + x + 1) - x$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Para determinar los máximos y mínimos absolutos de un intervalo dado de una función deben conocerse los siguientes puntos:

1) Si $c \in (a, b)$ y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c se denomina número crítico de (a, b) .

2) Una función f tiene un valor máximo absoluto en un intervalo (a, b) , si existe un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

3) Una función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo (a, b) , si existe un $c \in (a, b)$, tal que $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

4) Teorema del valor extremo: "Si la función f es continua en $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo o un valor mínimo absoluto en $[a, b]$ ".

Por ser $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = L(x^2 + x + 1) - x$ es continua y derivable en su dominio, que es \mathbb{R} .

$$f(-1) = L[(-1)^2 - 1 + 1] - (-1) = L1 + 1 = 1 = f(-1) \Rightarrow \underline{A(-1, 1)}.$$

$$f(2) = L(2^2 + 2 + 1) - 2 = L7 - 2 \cong -0'05 = f(2) \Rightarrow \underline{B(2, -0'05)}.$$

Vamos a determinar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 2]$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1 = \frac{2x+1-x^2-x-1}{x^2+x+1} = \frac{-x^2+x}{x^2+x+1} = \frac{-x(x-1)}{x^2+x+1} = f'(x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x(x-1)}{x^2+x+1} = 0 \quad ; \quad -x(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad ; \quad \underline{x_2 = 1}.$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+1)(x^2+x+1) + x(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1+2x^3+x^2-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} = f''(x).$$

$$f''(0) = -\frac{0+0-1}{(0+0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 0}.$$

$$f(0) = L(0+0+1) - 1 = L1 - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } C(0, -1)}.$$

$$f''(1) = -\frac{2+2-1}{(1+1+1)^2} = \frac{-3}{1} = -3 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 1}$$

$$f(1) = L(1+1+1) - 1 = L3 - 1 = 1'099 - 1 = 0'099 \Rightarrow \underline{\text{Máximo: } D(1, 0'099)}.$$

De lo expuesto con anterioridad se deduce que la función $f(x) = L(x^2 + x + 1) - x$ tiene el máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 2]$ en los puntos siguientes:

Máximo absoluto A(-1, 1) y mínimo absoluto B(2, -0'05).
