PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} y+3z=1 \\ (a^2-a-2)x-y-3z=-1 \\ (a^2-a-2)x+(a^2-2a)z=2-a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 \\ a^2-a-2 & 0 & a^2-2a \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 & -1 \\ a^2-a-2 & 0 & a^2-2a & 2-a \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro real α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 \\ a^2-a-2 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}=(a^2-a-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2-a-2)\cdot[-3+3-(a^2-2a)]=(a^2-a-2)\cdot(2a-a^2)=(a+1)(a-2)a(2-a)=$$

$$=-a(a+1)(a-2)^2=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1} \;;;\; \underline{a_3=2}.$$

Aclaración: $a^2-a-2=0 \;;;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow a_1=-1 \;;;\; a_2=2 \Rightarrow \underline{(a^2-a-2)=(a+1)(a-2)}$.

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ \ a=0\ \ ez\ \ A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-2+4=4\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0 \Rightarrow Rango\ \ A=2\ ;;\ Rango\ \ A'=3 \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1\ es\ \ A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -9-3+3+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=2}.$$

$$Para\ \ a=2\ \ es\ \ A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a=-1 \\ a=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A=Rango\ \ A'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos los casos de compatibilidad, primero cuando $\left\{\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{matrix}\right\}$ mediante la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2-a & 0 & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2}=\frac{0}{-a(a+1)(a-2)^2}=\underline{\underline{0=x}}\quad \{F_2=-F_1\}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 \\ a^2-a-2 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2}=\frac{(a+1)(a-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a-2)}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3-a & a^2-2a \end{vmatrix}}{-a(a-2)}=\frac{3(3-a)-3-(a^2-2a)}{-a(a-2)}=\frac{9-3a-3-a^2+2a}{-a(a-2)}=\frac{-a^2-a+6}{-a(a-2)}=\frac{a^2+a-6}{a(a-2)}=$$

$$=\frac{(a+3)(a-2)}{a(a-2)}=\underline{\underline{\frac{a+3}{a}=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ a^2-a-2 & -1 & -1\\ a^2-a-2 & 0 & 2-a\end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2}=\frac{(a+1)(a-2)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 2-a\end{vmatrix}}{-a(a+1)(a-2)^2}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 2-a\end{vmatrix}}{-a(a-2)}=$$

$$=\frac{-1+1-(2-a)}{-a(a-2)}=\frac{a-2}{-a(a-2)}=\underline{\underline{-\frac{1}{a}=z}}.$$

Resolvemos para α = -1; el sistema resulta $\begin{cases} y+3z=1\\ -y-3z=-1\\ 3z=3\end{cases}$, que es compatible indeterminado y cuya solución es:

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l}x=m\\ y=-2\\ z=1\end{array}\right\},\ \forall\lambda,\ m\in R}}$$

Resolvemos para α = 2; el sistema resulta $\begin{cases} y+3z=1\\ -y-3z=-1\\ 0=0\end{cases}$, equivalente al sistema de una ecuación con dos incógnitas $\{y+3z=1$, cuya solución es:

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l}x=m\\ y=1-3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\},\ \forall\lambda,\ m\in R}}$$

****

2º) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+3y-2z-2=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+3y-2z-2=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3x+3y=2+2\lambda \\ x-y=2\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x+3y=2+2\lambda \\ 3x-3y=6\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 6x=2+8\lambda \;;;$$

$$3x=1+4\lambda \;;;\; \underline{x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda} \;;;\; y=x-2\lambda=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda-2\lambda=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda=y \Rightarrow \underline{r=\begin{cases} x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$ $\overrightarrow{u}=(4,\ -2,\ 3)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 2)$.

El plano π, por contener a r, tiene como vector director a $\overrightarrow{u}=(4,\ -2,\ 3)$ y contiene al punto $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$ y, por ser paralelo a s, tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 2)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \;;;\; \begin{vmatrix} 3x-1 & 3y-1 & 3z \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \;::$$

$$-4(3x-1)+3(3y-1)+24z+6z-6(3x-1)-8(3y-1)=0 \;;;\; -10(3x-1)-5(3y-1)+30z=0 \;;;$$

$$2(3x-1)+(3y-1)-6z=0 \;;;\; 6x-2+3y-1-6z=0 \;;;\; 6x+3y-6z-3=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x+y-2z-1=0}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=x^{\sqrt{x^2-4x+7}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1,\ 3)$ tal que $f'(\alpha)=4$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Teniendo en cuenta que $x^2-4x+7>0,\ \forall x \in R$, la función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por consiguiente lo será en cualquier intervalo real que se considere.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice: si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Considerando el intervalo $(1,\ 3)$ y sabiendo que $f(1)=1^{\sqrt{1^2-4\cdot 1+7}}=1^{\sqrt{4}}=1^2=\underline{1=f(1)}$ y que $f(3)=3^{\sqrt{3^2-4\cdot 3+7}}=3^{\sqrt{4}}=3^2=\underline{9=f(3)}$, podemos establecer que:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

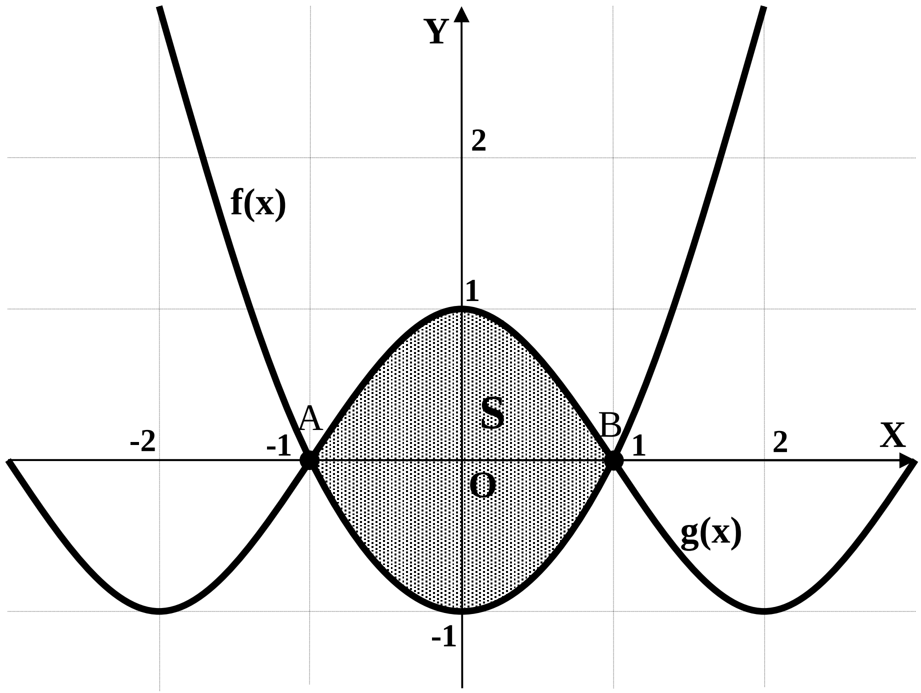
<u>Lo anterior demuestra que existe un valor α ϵ (1, 3) tal que f'(α) = 4.</u>

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x).

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-1=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Para x = ±1 resulta $f(x)=g(x)=0$, de donde resultan los dos puntos de corte, que son A(-1, 0) y B(1, 0).



La gráfica ilustra de la situación de ambas funciones y del recinto cuya superficie tenemos que calcular.

Ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x)=f(x)$ y $g(-x)=g(x)$, lo que facilita el cálculo de la superficie que encierran.

Todas las ordenadas de la función g(x) son mayores que las correspondientes ordenadas de la función f(x) en el intervalo (-1, 1), por lo que el área pedida es:

$$S=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)-(x^2-1)\right]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left[1-x^2+\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]\cdot dx=$$

$$=2\cdot\int_0^1(1-x^2)\cdot dx+2\cdot\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx=2\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2I=2\cdot\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-0\right]+2I=\underline{\frac{4}{3}+2I=S}. \quad (*)$$

$$I = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{\pi x}{2} = t & x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{2}{\pi} dt & x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [sen\ t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - 0) = \underline{\frac{2}{\pi} = I} \ .$$

Sustituyendo el valor de I en la expresión (*), queda:

$$S = \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} = \frac{4\pi + 12}{3\pi} = \underline{\underline{\frac{4(\pi + 3)}{3\pi}\ u^2 = S}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, calcula $|A \cdot B|$ y $|B \cdot A|$.

$$A \cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+1 & 0+1+2 & 0+0-1\\ 0-1+2 & 0-1+4 & 0-0-2\\ 0+0+2 & 0+0+4 & 0+0-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}=A \cdot B}.$$

$$|A \cdot B|=\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=-(24+4+12-6-32-6)=-(40-44)=\underline{\underline{4=|A \cdot B|}}.$$

$$B \cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+0 & 2-0+0 & 2+0+0\\ 1+0+0 & 1-1+0 & 1+2+0\\ 1+0-0 & 1-2-0 & 1+4-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=B \cdot A}.$$

$$|B \cdot A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=-2+6+6-6=\underline{\underline{4=|B \cdot A|}}.$$

Las soluciones son lógicas por lo siguiente:

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, o sea: $|A \cdot B|=|A| \cdot |B|=|B| \cdot |A|=|B \cdot A|$.

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$, sabiendo además que cada punto de r equidista de los puntos $P(-2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ -1,\ 1)$.

El punto medio de $P(-2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ -1,\ 1)$ es $M(-1,\ 0,\ 2)$.

Los puntos $P(-2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ -1,\ 1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,\ -1,\ 1) - (-2,\ 1,\ 3) = (2,\ -2,\ -2)$.

Se llama plano mediatriz de un segmento de extremos A y B al plano que pasa por su punto medio y es perpendicular a la recta que pasa por A y B.

El plano μ, mediatriz de $P(-2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ -1,\ 1)$, es el que tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ} = (2,\ -2,\ -2)$ y que contiene al punto $M(-1,\ 0,\ 2)$:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x - y - z + D = 0 \\ M(-1,\ 0,\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - 0 - 2 + D = 0 \ ;;\ D = 3 \Rightarrow \underline{\mu \equiv x - y - z + 3 = 0}.$$

El punto R de corte de la recta s con el plano μ es la solución del sistema que determinan:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ Sumando la segunda ecuación a las otras dos resulta:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - 6 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \ ;; \ \left. \begin{array}{l} -x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1 = 0 \ ;;\ x = -1 \ ;;\ \underline{y = 3} \ ;;$$

$$x - y - z + 3 = 0 \ ;;\ -1 - 3 - z + 3 = 0 \ ;;\ \underline{z = -1} \Rightarrow \underline{R(-1,\ 3,\ -1)}.$$

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - j + 4k - k + 2i - 2j = 3i - 3j + 3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (1,\ -1,\ 1)}.$$

El haz de planos α perpendiculares a la recta r es $\alpha \equiv x - y + z + D = 0$.

El plano ρ perteneciente al haz de planos α y que contiene al punto R(-1, 3, -1) es el que satisface su ecuación:

$$-1-3-1+D=0 \;\rightarrow\; D=5 \;\Rightarrow\; \underline{\rho \equiv x-y+z+5=0}.$$

La recta pedida r es la que determinan los planos μ y ρ: $r \equiv \begin{cases} x-y-z+3=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$.

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z+3=0 \\ x-y+z+5=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{y=\lambda} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} x-z=-3+\lambda \\ x+z=-5+\lambda \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 2x=-8+2\lambda \;;;\; \underline{x=-4+\lambda} \;;;$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+z=3-\lambda \\ x+z=-5+\lambda \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 2z=-2 \;;;\; \underline{z=-1} \;\Rightarrow\; r \equiv \begin{cases} x=-4+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{r \equiv \frac{x+4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}}}.$$

****

3º) Halla las integrales indefinidas $I_1 = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ e $I_2 = \int x^2 \cdot sen\,(2x) \cdot dx$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{(x-\sqrt{x}) \cdot dx}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \int \frac{(x-\sqrt{x}) \cdot dx}{x^2-(\sqrt{x})^2} = \int \frac{(x-\sqrt{x}) \cdot dx}{x^2-x} = \int \frac{x \cdot dx}{x^2-x} - \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x^2-x} =$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x^2-x} = \underline{L|x-1| - A = I_1}. \quad (*)$$

$$A = \int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x(x-1)} = \int \frac{(\sqrt{x})^2 \cdot dx}{x(x-1)\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \to x = t^2 \to x-1 = t^2-1 \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \to \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \frac{2dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} \right) \cdot dt = \int \frac{At-A+Bt+B}{t^2-1} \cdot dt = \int \frac{(A+B)t+(-A+B)}{t^2-1} \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{array} \right\} \to \left. \begin{array}{c} B=1 \\ A=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt = L|t-1| - L|t+1| = L\left| \frac{t-1}{t+1} \right| = L\left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| =$$

$$= L\left| \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right| = L\left| \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1} \right| = \underline{L\left|x-2\sqrt{x}+1\right| - L|x-1| = A}.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I_1 = L|x-1| - L\left|x-2\sqrt{x}+1\right| + L|x-1| = 2L|x-1| - L\left|x-2\sqrt{x}+1\right| + C =$$

$$I_1 = L|x-1| - L\left|x-2\sqrt{x}+1\right| + L|x-1| = 2L|x-1| - L\left|x-2\sqrt{x}+1\right| + C =$$

$$= L\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right)^2 + C = L\left[\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right]^2 + C = L\left[\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \right]^2 + C = \underline{\underline{L(\sqrt{x}+1)^2 + C = I_1}}.$$

* * * * *

La integral $I_2 = \int x^2 \cdot sen\,(2x) \cdot dx$ tiene que resolverse por el método de “por partes”, basado en la diferencial de un producto de funciones: $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Sabiendo que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral dada:

$$I_2 = \int x^2 \cdot sen\ (2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ sen\ (2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos\ (2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos\ (2x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cos\ (2x) \cdot 2x \cdot dx = -\frac{x^2}{2} \cos\ (2x) + \int x \cdot \cos\ (2x) \cdot dx =$$

$$\underline{= -\frac{x^2}{2} \cos\ (2x) + M = I_2}\ . \qquad (*)$$

$$M = \int x \cdot \cos\ (2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos\ (2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2}\ sen\ (2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2}\ sen\ (2x) - \int \frac{1}{2}\ sen\ (2x) \cdot dx = \frac{x}{2}\ sen\ (2x) - \frac{1}{2} \int sen\ (2x) \cdot dx = \frac{x}{2}\ sen\ (2x) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos\ (2x) =$$

$$\underline{= \frac{x}{2}\ sen\ (2x) + \frac{1}{4} \cos\ (2x) = M}\ .$$

Sustituyendo en valor obtenido de M en el valor de I_2 (*), queda:

$$I_2 = -\frac{x^2}{2} \cos\ (2x) + \frac{x}{2}\ sen\ (2x) + \frac{1}{4} \cos\ (2x) + C = \frac{1}{4}\left(1 - 2x^2\right) \cos\ (2x) + \frac{x}{2}\ sen\ (2x) + C\ .$$

$$\underline{\underline{I_2 = \int x^2\ sen(2x)\ dx = \frac{1}{4}\left[\left(1 - 2x^2\right) \cos\ (2x) + 2x \cdot sen\ (2x)\right] + C}}$$

****

4º) Calcula el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo $[-1,\ 2]$, de la función $f(x)=L(x^2+x+1)-x$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Para determinar los máximos y mínimos absolutos de un intervalo dado de una función deben conocerse los siguientes puntos:

1) Si $c\in(a,\ b)$ y si $f'(c)=0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c se denomina número crítico de $(a,\ b)$.

2) Una función f tiene un valor máximo absoluto en un intervalo $(a,\ b)$, si existe un $c\in(a,\ b)$, tal que $f(c)\geq f(x),\ \forall x\in(a,\ b)$.

3) Una función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo $(a,\ b)$, si existe un $c\in(a,\ b)$, tal que $f(c)\leq f(x),\ \forall x\in(a,\ b)$.

4) Teorema del valor extremo: “Si la función f es continua en $[a,\ b]$, entonces f tiene un valor máximo o un valor mínimo absoluto en $[a,\ b]$”.

Por ser $x^2+x+1>0,\ \forall x\in R$, la función $f(x)=L(x^2+x+1)-x$ es continua y derivable en su dominio, que es R.

$$f(-1)=L\left[(-1)^2-1+1\right]-(-1)=L1+1=\underline{1=f(-1)}\ \Rightarrow\ \underline{A(-1,\ 1)}.$$

$$f(2)=L(2^2+2+1)-2=L7-2\cong\underline{-0'05=f(2)}\ \Rightarrow\ \underline{B(2,\ -0'05)}.$$

Vamos a determinar los máximos y mínimos relativos de la función f(x) en el intervalo $[-1,\ 2]$:

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}-1=\frac{2x+1-x^2-x-1}{x^2+x+1}=\frac{-x^2+x}{x^2+x+1}=\underline{\frac{-x(x-1)}{x^2+x+1}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{-x(x-1)}{x^2+x+1}=0\ ;;\ -x(x-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

$$f''(x)=\frac{(-2x+1)(x^2+x+1)+x(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1+2x^3+x^2-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}=\underline{-\frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2}=f''(x)}.$$

$$f''(0)=-\frac{0+0-1}{(0+0+1)^2}=\frac{1}{1}=1>0\ \Rightarrow\ \underline{\text{Mínimo relativo para x = 0}}.$$

$$f(0) = L(0+0+1) - 1 = L1 - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}:\ C(0,\ -1)}.$$

$$f''(1) = -\frac{2+2-1}{(1+1+1)^2} = \frac{-3}{1} = -3 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para x = 1}}$$

$$f(1) = L(1+1+1) - 1 = L3 - 1 = 1'099 - 1 = 0'099 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo}:\ D(1,\ 0'099)}.$$

De lo expuesto con anterioridad se deduce que la función $f(x) = L(x^2 + x + 1) - x$ tiene el máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[-1,\ 2]$ en los puntos siguientes:

Máximo absoluto A(-1, 1) y mínimo absoluto B(2, -0’05).

****