PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2013 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} 2ax+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ ax-y+2z=0 \\ -ax+y-z=a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 2a & a^2+a-2 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2a & a^2+a-2 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix}=2a+2a-2a(a^2+a-2)-2a-4a+a(a^2+a-2)=$$

$$=-a(a^2+a-2)-2a=-a^3-a^2+2a-2a=-a^3-a^2=-a^2(a+1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=a_2=0} \;;;\; \underline{a_3=-1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M=2}.$$

$$Para\ \ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (1-2) = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0 \Rightarrow Rango\ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 2}.$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4+2-4-2 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 2ax+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ ax-y+2z=0 \\ -ax+y-z=a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sumando a la tercera fila la segunda:}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2ax+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ ax-y+2z=0 \\ z=a \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{z=a}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2ax+(a^2+a-2)y=2-2a \\ ax-y=-2a \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Restando a la primera el doble de la segunda resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2ax+(a^2+a-2)y-2ax+2y=2-2a+4a \\ ax-y=-2a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} (a^2+a-2)y+2y=2+2a \\ ax-y=-2a \end{array}\right\} \rightarrow a(a+1)y=2(1+a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay=2\ \ ;;\ \ \underline{\underline{y=\frac{2}{a}}} \Rightarrow ax-y=-2a\ \ ;;\ \ ax=y-2a=\frac{2}{a}-2a=\frac{2-2a^2}{a}=\frac{2(1-a^2)}{a}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{x=\frac{2(1-a^2)}{a^2}}}.$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado, para α = -1, en cuyo

caso el sistema resulta $\begin{cases} -2x-2y+2z=2 \\ -x-y+2z=0 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} -x-y+2z=0 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$.

Sumando las dos ecuaciones se deduce que z = -1, resultando: $\{x+y=-2$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=-1 \end{cases}, \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Dados el punto P(1, 1, 3) y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$, encuentra la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r y que cumple d(P, π) = 3.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2j - 2k + k - 2i = -2i - 2j - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (2,\ 2,\ 1)}.$$

La expresión general del haz β de los infinitos planos perpendiculares a la recta r es de la forma $\beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos β buscamos los planos π cuya distancia al punto P(1, 1, 3) es de 3 unidades.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto P(1, 1, 3) y a los planos $\beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0$:

$$d(P;\ \pi) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 2 + 3 + D|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|7 + D|}{\sqrt{9}} = \frac{|7 + D|}{3} = 3\ ;;\ |7 + D| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 7 + D = 9 \\ -7 - D = 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{D_1 = 2}\ ;;\ \underline{D_2 = -16}.$$

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 2x + 2y + z + 2 = 0}}\ \ y\ \ \underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x + 2y + z - 16 = 0}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,\ 3)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

La derivada de la función se obtiene por logaritmos neperianos.

$$L\left[f(x)\right]=L\left(x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)=L\,x+\cos\frac{\pi x}{2}\cdot L\,e=L\,x+\cos\frac{\pi x}{2}.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}=\underline{\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}}.$$

Considerando la función $g(x)=f'(x)-2$, que es continua en su dominio que es el conjunto de los números reales, le es aplicable el teorema de Bolzano en cualquier intervalo real considerado.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Demostrar que $f'(\alpha)=2$ para un valor de $\alpha\in(1,\ 3)$ es equivalente a demostrar que la función g(x) tiene una raíz real en el intervalo $(1,\ 3)$.

$$g(1)=\left(1-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi}{2}}-2=\left(1-\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\cdot e^{0}-2=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1-2=1-\frac{\pi}{2}-2=-\frac{\pi}{2}-1<0.$$

$$g(3)=\left(1-\frac{3\pi}{2}\,sen\,\frac{3\pi}{2}\right)e^{\cos\frac{3\pi}{2}}-2=\left[1-\frac{3\pi}{2}\cdot(-1)\right]e^{0}-2=\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)-2=1+\frac{3\pi}{2}-2=\frac{3\pi}{2}-1>0.$$

<u>En efecto: se cumple que g(1) < 0 < g(3), lo que demuestra lo pedido.</u>

****

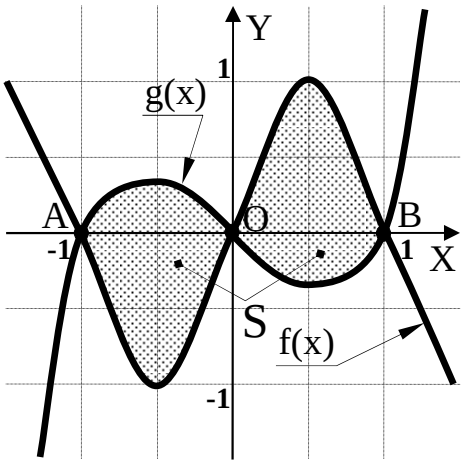
4º) Dadas las funciones $f(x)=sen\,(\pi x)$ y $g(x)=x^3-x$, encuentra los tres puntos en que se cortan y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

Los puntos de corte de las funciones se obtienen de la igualación de sus expresiones.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow sen\,(\pi x)=x^3-x \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow y_1=0 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2=0 \rightarrow y_2=0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_3=1 \rightarrow y_3=0 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{cases}.$$

Las dos funciones son simétricas con respecto al origen por ser $f(x)=-f(-x)$ y $g(x)=-g(-x)$.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que se indica en la figura.



De la observación de la figura y teniendo en cuenta sus simetrías, el área pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^1[f(x)-g(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left[sen\,(\pi x)-\left(x^3-x\right)\right]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left[sen\,(\pi x)-x^3+x\right]\cdot dx.$$

Sabiendo que: $I=\int sen\,(\pi x)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \pi x=t \\ dx=\frac{1}{\pi}\cdot dx \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=\frac{1}{\pi}\cdot\int sen\,t\cdot dt=\underline{-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)}$:

$$S=2\cdot\left[-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cdot\cos\pi-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cdot\cos 0-0+0\right)=$$

$$=2\cdot\left[-\frac{1}{\pi}\cdot(-1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]-2\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cdot 1\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}+1+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{8+\pi}{2\pi}\,u^2\cong 1'77\,u^2=S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra los valores $t \in R$ que hacen que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sea no regular.

Una matriz es regular cuando tiene inversa, es decir, que su determinante tiene que ser distinto de cero. Una matriz es no regular cuando el valor de su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -2t - 4(t+3) + 2t(t+3) + 2 + 8 = 0 \;;;\; -2t - 4t - 12 + 2t^2 + 6t + 10 = 0 \;;;$$

$2t^2 - 2 = 0 \;;;\; t^2 - 1 = 0 \;;;\; t^2 = 1 \Rightarrow \underline{t_1 = -1} \;\; y \;\; \underline{t_2 = 1}$.

<u>La matriz A es no regular para t = -1 y para t = 1.</u>

****

2º) Los puntos P(2, -2, 1), Q(-1, -2, 1) y R(3, 0, 3) son tres vértices de un rombo. Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el centro del rombo y es perpendicular al plano que contiene al rombo.

Para saber cual es la situación de los vértices dados hallamos las distancias entre cada dos de ellos:

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-1-2)^2+(-2+2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+0^2+0^2}=\sqrt{9}=\underline{3\ unidades}\,.$$

$$\overline{PR}=\sqrt{(3-2)^2+(0+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=\underline{3\ unidades}\,.$$

$$\overline{QR}=\sqrt{(3+1)^2+(0+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}=\underline{2\sqrt{6}\ unidades}\,.$$

El punto medio del rombo es el punto medio del segmento $\overline{QR}$, que es una diagonal del rombo.

$$M\ \Rightarrow\ \frac{Q+R}{2}\ \Rightarrow\ \frac{(-1,\ -2,\ 1)+(3,\ 0,\ 3)}{2}=\frac{(2,\ -2,\ 4)}{2}\ \Rightarrow\ \underline{M(1,\ -1,\ 2)}\,.$$

Los puntos P(2, -2, 1), Q(-1, -2, 1) y R(3, 0, 3) determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-1,-2,1)-(2,\ -2,\ 1)=(-3,\ 0,\ 0)\,.$$

$$\overrightarrow{PR}=R-P=(3,0,3)-(2,\ -2,\ 1)=(1,\ 2,\ 2)$$

La ecuación general del plano π que contiene al rombo es:

$$\pi\left(R;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -6(z-3)+6y=0\ ;;\ -(z-3)+y=0\ ;;$$

$$-z+3+y=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi\equiv y-z+3=0}\,.$$

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n}=(0,\ 1,\ -1)$.

La recta r pedida es la que tiene como vector director al vector normal del plano y que pasa por el punto M(1, -1, 2); su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}}}$$

****

3º) Calcula los siguientes límites: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right]$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n-2n-3}{n^2+2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n}+\frac{-2n-3}{n^2+2n}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-2n-3}{n^2+2n}\right)^{2n}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.\ tipo\ n^{o}\ e\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right)^{\frac{n^2+2n}{-2n-3}\cdot\frac{-2n-3}{n^2+2n}\cdot 2n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right)^{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right]^{\frac{-4n^2-6n}{n^2+2n}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right)^{\frac{n^2+2n}{-2n-3}}\right]^{\frac{-4n^2-6n}{n^2+2n}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4n^2-6n}{n^2+2n}}=e^{-4}=\underline{\underline{\frac{1}{e^4}}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right]=\infty\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\infty}\right)=\infty\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\infty\cdot\cos\frac{\pi}{2}=\infty\cdot 0\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right]=2\cdot sen\frac{\pi}{2}=2\cdot 1=\underline{\underline{2}}.$$

****

4º) Dada la función $f(x)=x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,\ 3)$ tal que $f''(\alpha)=\pi$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

La segunda derivada de la función se obtiene mediante logaritmos neperianos.

$$L[f(x)]=L\left(x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)=L\,x+\cos\frac{\pi x}{2}\cdot L\,e=\underline{L\,x+\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}=\underline{\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}}.$$

$$L[f'(x)]=L\left[\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}\right]=L\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\frac{\pi x}{2}\cdot L\,e=$$

$$=\underline{L\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\frac{\pi x}{2}=L[f'(x)]}.$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{sen\,\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}}+sen\,\frac{\pi x}{2}\right).$$

$$f''(x)=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{sen\,\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}}+sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

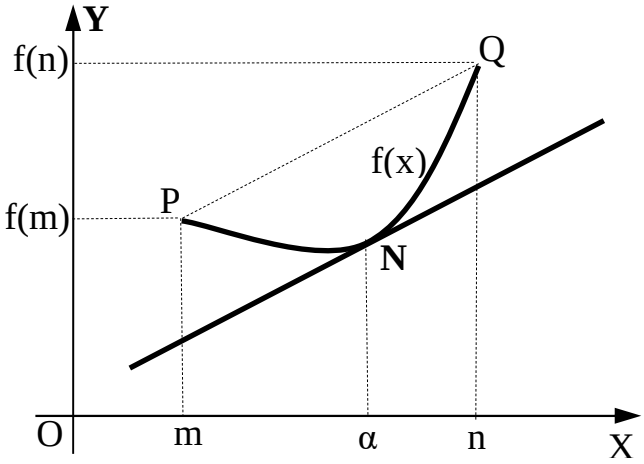
$$=-\frac{\pi}{2}\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\left(sen\,\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}+sen\,\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x}{2}\cdot sen^2\,\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\left(\frac{\pi x}{2}\cdot sen^2\,\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}-2\,sen\,\frac{\pi x}{2}\right)=f''(x)}.$$

La función $f'(x)=\left(1-\frac{\pi x}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi x}{2}}$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, que dice que "si f(x) es una función continua en el intervalo [m, n] y derivable en (m, n), entonces, existe al menos un punto $\alpha\in(m,\ n)$ que cumple: $f'(\alpha)=\frac{f(n)-f(m)}{n-m}$".

La interpretación geométrica puede apreciarse más fácilmente mediante la figura

adjunta.



Considerada la función f(x), continua en [m, n] y derivable en (m, n) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (m, n) en el que la recta tangente a la gráfica f(x) es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas $P[m,\ f(m)]\ y\ Q[n,\ f(n)]$.

$$f'(3)=\left(1-\frac{3\pi}{2}\cdot sen\,\frac{3\pi}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{3\pi}{2}}=\left[1-\frac{3\pi}{2}\cdot(-1)\right]\cdot e^{0}=\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot 1=\underline{\frac{3\pi+2}{2}}.$$

$$f'(1)=\left(1-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot e^{\cos\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\cdot e^{0}=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=\underline{\frac{2-\pi}{2}}.$$

$$f''(\alpha)=\frac{f'(3)-f'(1)}{3-1}=\frac{\frac{3\pi+2}{2}-\frac{2-\pi}{2}}{2}=\frac{3\pi+2-2+\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}=\underline{\pi}.$$

<u>En efecto: existe un valor α ε (1, 3) tal que f''(x) = π, como debíamos demostrar.</u>

****