PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2014 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a+1)x + ay = 3 \\ (a+1)x + (a+1)y + (a+2)z = 1 \\ (a^2+a)x + (a^2-1)y + (a^2-2a-8)z = 2a+5 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 \\ a+1 & a+1 & a+2 \\ a^2+a & a^2-1 & a^2-2a-8 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a+1 & a & 0 & 3 \\ a+1 & a+1 & a+2 & 1 \\ a^2+a & a^2-1 & a^2-2a-8 & 2a+5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente, teniendo en cuenta que $a^2-2a-8=0$;; $a=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=1\pm 3 \Rightarrow a_1=-2,\ a_2=4$, con lo cual la expresión a^2-2a-8 puede expresarse así: $a^2-2a-8=(a+2)(a-4)$.

$$|M| = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 \\ a+1 & a+1 & a+2 \\ a(a+1) & a^2-1 & (a+2)(a-4) \end{vmatrix} = (a+1)(a+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a & a^2-1 & a-4 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)(a+2)\left[(a+1)(a-4)+a^2-(a^2-1)-a(a-4)\right] = (a+1)(a+2)(a^2-4a+a-4+a^2-a^2+1-a^2+4a) =$$

$$= (a+1)(a+2)(a-3)=0 \Rightarrow \underline{a_1=-1},\ \underline{a_2=-2},\ \underline{a_3=3}.$$

$$Para \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq -2 \\ a \neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado.$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -3 - 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 3}$.

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 1 - 9 - 4 + 6 + 3 - 2 = 10 - 15 = -5 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 3}$.

$$Para \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \\ 12 & 8 & -5 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \{4F_1 - F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 2}.$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado.

$$\begin{cases} (a+1)x + ay = 3 \\ (a+1)x + (a+1)y + (a+2)z = 1 \\ (a^2 + a)x + (a^2 - 1)y + (a^2 - 2a - 8)z = 2a + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + (a+2)z = -2 \\ -y + (a^2 - 2a - 8)z = -a + 5 \end{cases} \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow (a^2 - a - 6)z = -a + 3 \Rightarrow z = \frac{-a+3}{a^2 - a - 6} =$$

$$= \frac{-a+3}{(a-3)(a+2)} = \underline{\underline{\frac{-1}{a+2}}} = z. \quad y = -2 - (a+2)z = -2 - (a+2) \cdot \frac{-1}{a+2} = -2 + 1 = \underline{-1}.$$

$$(a+1)x + ay = 3\ ;;\ (a+1)x - a = 3\ ;;\ \underline{x = \frac{a+3}{a+1}}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\quad x = \frac{a+3}{a+1},\ y = -1,\ z = \frac{-1}{a+2}}}.$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado, para α = 3, en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} 4x+3y=3 \\ 4x+4y+5z=1 \\ 12x+8y-5z=11 \end{cases}$. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $\underline{z=\lambda}$: $\left.\begin{array}{l} 4x+3y=3 \\ 4x+4y=1-5\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x-3y=-3 \\ 4x+4y=1-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-2-5\lambda}$;; $4x=3-3y=3+6+15\lambda=$

$=9+15\lambda$;; $\underline{x=\frac{9}{4}+\frac{15}{4}\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\frac{9}{4}+\frac{15}{4}\lambda \\ y=-2-5\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \forall\lambda\in R.}}$$

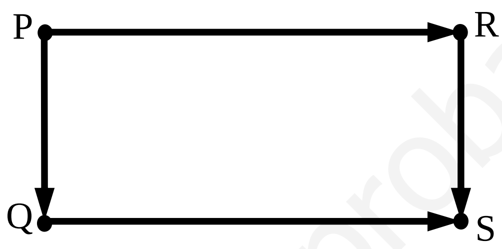
****

2º) Los puntos P(-2, 3, 2), Q(-1, 2, 4) y R(2, 5, 1) son vértices de un rectángulo. Encuentra el cuarto vértice.

Los puntos P(-2, 3, 2), Q(-1, 2, 4) y R(2, 5, 1) determinan los vectores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-1,\ 2,\ 4)-(-2,\ 3,\ 2)=(1,\ -1,\ 2)\\ \\ \overrightarrow{PR}=R-P=(2,\ 5,\ 1)-(-2,\ 3,\ 2)=(4,\ 2,\ -1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(1,\ -1,\ 2)\cdot(4,\ 2,\ -1)=4-2-2=0.$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son perpendiculares, lo que significa que los puntos R y Q no son consecutivos; la representación gráfica de la situación es la siguiente:



De la observación de la figura se deduce lo siguiente:

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PR}=(4,\ 2,\ -1)\\ \\ \overrightarrow{QS}=S-Q=(x,\ y,\ z)-(-1,\ 2,\ 4)=(x+1,\ y-2,\ z-4)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+1=4\\ y-2=2\\ z-4=-1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=4\\ z=3\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{S(3,\ 4,\ 3)}}.$$

****

3º) Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante: $f(x)=L\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ y $g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}$.

$$f(x)=L\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}L(1-x)-\frac{1}{2}L(1+x).$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x+1-x+1}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2}{2(x+1)(x-1)}=\underline{\frac{1}{x^2-1}}.$$

$$f(x)=L\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f'(x)=\frac{1}{x^2-1}}}.$$

$$g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}\ \Rightarrow\ L[g(x)]=2x\cdot L\left(\frac{\cos x}{x}\right)=2x\cdot[L(\cos x)-L\,x].$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=2\cdot[L(\cos x)-L\,x]+2x\cdot\left(\frac{-sen\ x}{\cos x}-\frac{1}{x}\right)=2\cdot[L(\cos x)-L\,x]+2x\cdot tag\ x-2=$$

$$=2\cdot\left(L\frac{\cos x}{x}+x\cdot tag\ x-1\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{g'(x)=2\cdot\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}\cdot\left(L\frac{\cos x}{x}+x\cdot tag\ x-1\right)}}.$$

****

4º) Dada la función $f(x)=(x-2)\cdot e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,\ 3)$ tal que $f'(a)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

$$x^2-4x+5=0\ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}\ \Rightarrow\ x\notin R\ \Rightarrow\ \underline{x^2-4x+5>0,\ \forall x\in R}.$$

De lo anterior se deduce que la función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual es continua en cualquier intervalo finito que se considere, como por ejemplo el intervalo [1, 3] y derivable en (1, 3), por lo que le es aplicable el teorema del Valor Medio del cálculo diferencial o teorema de Lagrange, que se puede enunciar del modo siguiente:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [m, n] y derivable en (m, n), entonces, existe al menos un punto $a\in(m,\ n)$ que cumple: $f'(a)=\frac{f(m)-f(n)}{m-n}$".

$$f'(a)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1}{2}[f(3)-f(1)]=\frac{1}{2}\left[e^{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{2}\right)-(-1)\cdot e^{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{7\pi}{10}\right)+\cos\frac{7\pi}{10}\right]=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\left(\cos\pi\cdot\cos\frac{7\pi}{10}-sen\ \pi\cdot sen\ \frac{7\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\left(-1\cdot\cos\frac{7\pi}{10}-0\cdot sen\ \frac{7\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}\right)=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\left(-\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2}\cdot 0=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f'(a)=0,\ c.\ q.\ j.}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sabiendo que el determinante de la matriz A vale 1, halla el valor del determinante de la matriz B, siendo $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2g & a & a-d \\ 2h & b & b-e \\ 2k & c & c-f \end{pmatrix}$.

Sabiendo que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta es $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}=1$.

$$|B|=\begin{vmatrix} 2g & a & a-d \\ 2h & b & b-e \\ 2k & c & c-f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2g & a & a \\ 2h & b & b \\ 2k & c & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2g & a & -d \\ 2h & b & -e \\ 2k & c & -f \end{vmatrix}=0-2\cdot\begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ k & c & f \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}=$$

$=-2\cdot 1=-2$.

$$\underline{\underline{|B|=-2}}.$$

Además de la propiedad indicada anteriormente, se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de un determinante por un número, su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Si los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

Si se rotan todas las líneas de un determinante, su valor no varía.

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a las rectas $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

La expresión de s por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -y + z = 3 - 2\lambda \\ 2y - z = -1 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y = 2 - 3\lambda} \ ;; \ z = y + 3 - 2\lambda =$$

$$= 2 - 3\lambda + 3 - 2\lambda = \underline{5 - 5\lambda = z} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 5 - 5\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta s: A(0, 2, 5) y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -3,\ -5)$. Recta t: B(0, -3, 1) y $\overrightarrow{v_t} = (3,\ -1,\ 1)$.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta t es el siguiente:

1.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{v_t}$:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{v_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 15j - k + 9k - 5i - j = -8i - 16j + 8k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1,\ 2,\ -1)}.$$

2.- Determinamos los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$, de la forma siguiente:

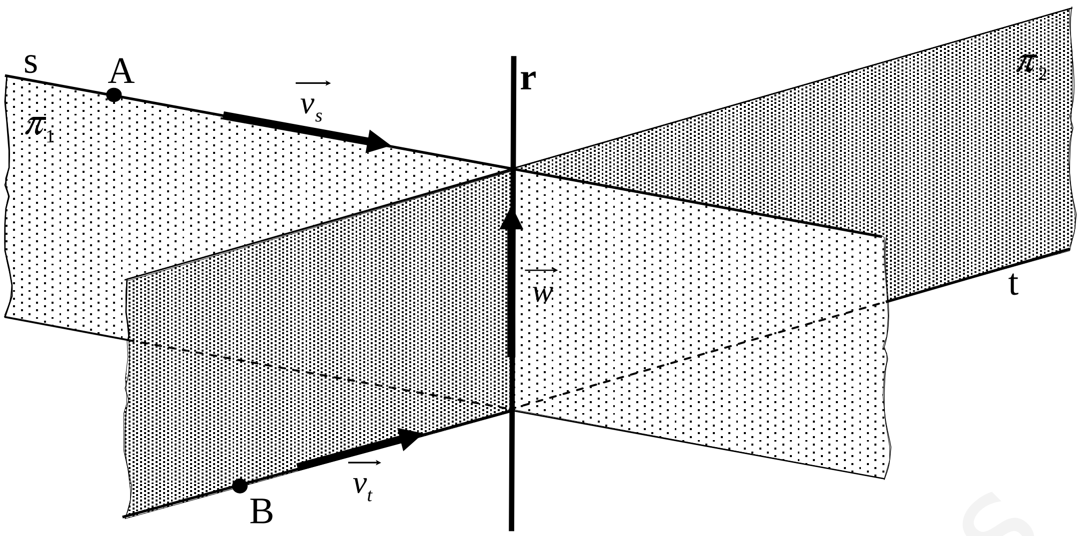
$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 3x - 5(y-2) + 2(z-5) + 3(z-5) + 10x + (y-2) = 0 \ ;;$$

$$13x - 4(y-2) + 5(z-5) = 0 \ ;; \ 13x - 4y + 8 + 5z - 25 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 13x - 4y + 5z - 17 = 0}$$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_t},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ x + (y+3) + 6(z-1) + (z-1) - 2x + 3(y+3) = 0 \ ;;$$

$$-x + 4(y+3) + 7(z-1) = 0 \ ;; \ -x + 4y + 12 + 7z - 7 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x - 4y - 7z - 5 = 0}.$$

La representación gráfica de la situación se refleja en el dibujo que se expresa a continuación.



3.- La recta pedida r dada por dos ecuaciones implícitas es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección: $r \equiv \begin{cases} 13x - 4y + 5z - 17 = 0 \\ x - 4y - 7z - 5 = 0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 13x - 4y + 5z - 17 = 0 \\ x - 4y - 7z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4y + 5z = 17 - 13\lambda \\ -4y - 7z = 5 - \lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -4y + 5z = 17 - 13\lambda \\ 4y + 7z = -5 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z = 12 - 12\lambda \;;;\; \underline{z = 1 - \lambda} \;;;\; 4y = -7z - 5 + \lambda = -7 + 7\lambda - 5 + \lambda = -12 + 8\lambda \;;;\; \underline{y = -3 + 2\lambda}.$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x)=e^{1+2x-x^2}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,\ 2)$ tal que $f'(a)=-e$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

$$f'(x)=(2-2x)\cdot e^{1+2x-x^2}=\underline{2(1-x)\cdot e^{1+2x-x^2}}.$$

La función f'(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo el intervalo (1, 2), por lo que le es aplicable el teorema del Valor Intermedio o propiedad de Darboux, que se puede enunciar del modo siguiente:

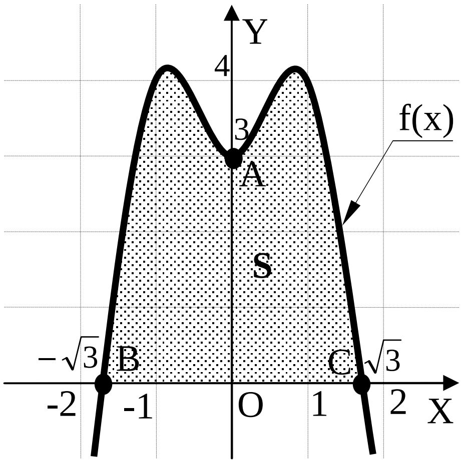
"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y k es un valor comprendido entre los valores f(m) y f(n), entonces existe algún valor $c\in(a,\ b)$ tal que f(c) = k".

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=2\cdot(1-1)\cdot e^{1+2-1}=0 \\ f'(2)=2\cdot(1-2)\cdot e^{1+4-4}=-2\cdot e=-2e \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'(1)>f'(a)>f'(2)} \Rightarrow \underline{0>-e>-2e}.$$

<u>Lo anterior demuestra lo pedido</u>.

****

4º) Dada la función $f(x)=3+2x^2-x^4$, halla los puntos de corte con el eje de abscisas y calcula el área de la región del plano encerrada entre esa curva y el eje de abscisas.



La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

Los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas son los siguientes:

Eje Y: x = 0.

$f(0)=3 \Rightarrow \underline{A(0,\ 3)}$.

Eje X: $f(x)=0$. $3+2x^2-x^4=0$;; $x^4-2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=a \Rightarrow a^2-2a-3=0$;;

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow\begin{cases} a_1=-1=x^2 \ \Rightarrow\ \underline{x\notin R} \\ a_2=3=x^2 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=-\sqrt{3}\ \rightarrow\ \underline{B\left(-\sqrt{3},\ 0\right)} \\ x_2=\sqrt{3}\ \rightarrow\ \underline{C\left(\sqrt{3},\ 0\right)} \end{cases} \end{cases}.$$

Por ser $f(-x)=f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje OY, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S=2\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\cdot\, dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(3+2x^2-x^4\right)dx=2\cdot\left[3x+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=2\cdot\left[3\sqrt{3}+\frac{2\left(\sqrt{3}\right)^3}{3}-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5}\right]=$$

$$=2\cdot\left(3\sqrt{3}+\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{3}-\frac{3^2\cdot\sqrt{3}}{5}\right)=2\sqrt{3}\cdot\left(3+2-\frac{9}{5}\right)=2\sqrt{3}\cdot\left(5-\frac{9}{5}\right)=2\sqrt{3}\cdot\frac{16}{5}=\underline{\underline{\frac{32\sqrt{3}}{5}\ u^2=S}}.$$

****