PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax - y = 0 \\ -2ax + a^2y + az = -2a \\ -ax + (a^2-1)y + (a+1)z = -a-2 \end{cases}$ dependiente del parámetro α y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -2a & a^2 & a \\ -a & a^2-1 & a+1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -2a & a^2 & a & -2a \\ -a & a^2-1 & a+1 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -2a & a^2 & a \\ -a & a^2-1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3(a+1) + a^2 - a^2(a^2-1) - 2a(a+1) = 0;$$

$$= a^4 + a^3 + a^2 - a^4 + a^2 - 2a^2 - 2a = a^3 - 2a = a(a^2-2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 0},$$

$$\boldsymbol{a_2 = -\sqrt{2}, a_3 = \sqrt{2}}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq -\sqrt{2} \\ a \neq 0 \\ a \neq +\sqrt{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

Para α = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 2}.$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-\sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}-2 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2}-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(-2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\right) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$$

$$Para\ a=\sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}-2 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2\right) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$$

$$\underline{Para\ a=-\sqrt{2}\ y\ a=\sqrt{2} \Rightarrow Ran\ M = 2; Ran\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible.}$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{l} ax - y = 0 \\ -2ax + a^2y + az = -2a \\ -ax + (a^2-1)y + (a+1)z = -a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} ax - y = 0 \\ -2x + ay + z = -2 \\ -ax + (a^2-1)y + (a+1)z = -a-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = ax \\ \qquad\quad \Rightarrow \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + a^2x + z = -2 \\ -ax + a(a^2-1)x + (a+1)z = -a-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (a^2-2)x + z = -2 \\ a(a^2-2)x + (a+1)z = -a-2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a(a^2-2)x - az = 2a \\ a(a^2-2)x + (a+1)z = -a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -az + (a+1)z = a-2 \Rightarrow \boldsymbol{z = a - 2}.$$

$$(a^2-2)x + a - 2 = -2 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{a}{2-a^2}}. \qquad \boldsymbol{y = \frac{a^2}{2-a^2}}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{a}{2-a^2}, y = \frac{a^2}{2-a^2}, z = a - 2.}$$

Para α = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = 0, z = -2, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P (1, -2, 3) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 3x+y-3z-2=0 \end{cases}$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$ y : $\overrightarrow{n_2} = (3, 1, -3)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3i + 3j + k - 3k - i + 3j =$$

$$= -4i + 6j - 2k \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\overrightarrow{v_r} = (2, -3, 1)}.$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

El plano $\pi \in \beta$ que contiene al punto P (1, -2, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \\ P(1, -2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 3 + D = 0; 2 + 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11 + D = 0 \to D = -11 \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\pi \equiv 2x - 3y + z - 11 = 0}.$$

El punto de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 3x+y-3z-2=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x - 3y + z - 11 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ 3x+y-3z=2 \\ 2x-3y+z=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} -2y - 6z = -10 \\ -5y - z = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y + 3z = 5 \\ -15y - 3z = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow -14y = 14; \;\; \boldsymbol{y = -1}.$$

$$-1 + 3z = 5; \;\; 3z = 6; \;\; \boldsymbol{z = 2}. \qquad x - 1 + 2 = 4; \;\; \boldsymbol{x = 3}.$$

El punto de corte es **Q (3, -1, 2)**.

La recta pedida s es la que pasa por P y Q.

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3, -1, 2) - (1, -2, 3)] = (2, 1, -1).$$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

****

3º) Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-2}$.

Verticales: Son de la forma x = k; son los valores que anulan el denominador.

$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2}$.

Horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x-2} = \infty.$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}$.

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\ y\ n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-2x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1-2x^2+4x}{x-2} = 4.$$

$\underline{Asíntota\ oblicua: y = 2x + 4}$.

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = 4 - 4x^2$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

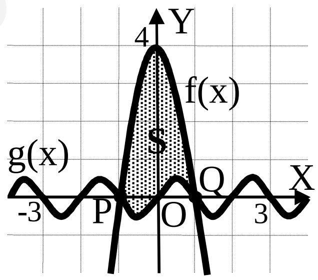
La función $f(x) = sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}$ puede expresarse de forma más sencilla de la forma: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot sen\ (\pi x)$.

Las abscisas de los puntos de corte de las funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) = 4 - 4x^2;\ \ \operatorname{sen}(\pi x) = 8 - 8x^2.$$

Las únicas raíces reales de la ecuación obtenida son $\boldsymbol{x_1 = -1\ y\ x_2 = 1}$.

Los puntos de corte son $\underline{P(-1, 0)}$ y $\underline{Q(1, 0)}$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.

En el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-1, 1)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la función seno, por lo cual, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} \left[(4 - 4x^2) - \frac{1}{2} \cdot sen\ (\pi x)\right] \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos(\pi x)\right]_{-1}^{1} = \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\pi\right) - \left[-4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos(-\pi)\right] =$$

$$= 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2\pi} + 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} = 8 - \frac{8}{3} = \underline{\frac{16}{3}\ u^2}.$$

Aclaración:

$$\int sen\ (\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi x = t \\ dx = \frac{dt}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \int sen\ t \cdot \frac{dt}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos t = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x).$$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra los valores de t ε R para los que el determinante de la matriz A · B vale 0, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{pmatrix}$.

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1+t & 3 \end{vmatrix}\cdot t\cdot\begin{vmatrix} 2+t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=2t\cdot[3t-2\cdot(1+t)]\cdot(2t+t^2+1)=$$

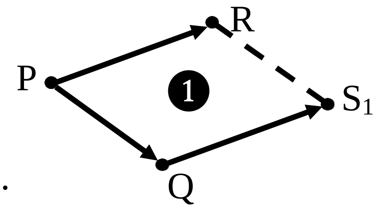
$$=2t\cdot(3t-2-2t)\cdot(t+1)^2=2t\cdot(t-2)\cdot(t+1)^2=0\Rightarrow\begin{cases} t_1=0 \\ t_2=2 \\ t_3=-1 \end{cases}.$$

$$\underline{|A\cdot B|=0\ para\ t=0, t=2\ y\ t=-1}.$$

****

2º) Dados los puntos P (1, 2, -1), Q (2, -1, 1) y R (3, 1, 2), encuentra todos los posibles puntos S tales que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo.

Los casos posibles son los siguientes: $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS_1} \;\Rightarrow$

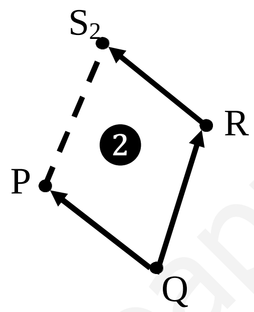


$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(3,1,2) - (1,2,-1)] = (2,-1,3).$

$\overrightarrow{QS_1} = [S_1 - Q] = [(x,y,z) - (2,-1,1)] = (x-2, y+1, z-1).$

$$\left.\begin{array}{l} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ y+1=-1 \rightarrow y=-2 \\ z-1=3 \rightarrow z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{S_1(4,-2,4)}.$$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS_2} \;\Rightarrow$

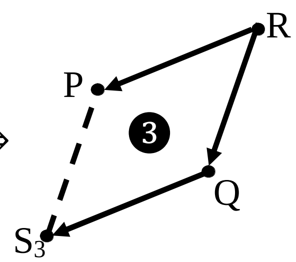


$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(3,1,2) - (2,-1,1)] = (1,2,1).$

$\overrightarrow{PS_2} = [S_2 - P] = [(x,y,z) - (1,2,-1)] = (x-1, y-2, z+1).$

$$\left.\begin{array}{l} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ y-2=2 \rightarrow y=4 \\ z+1=1 \rightarrow z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{S_2(2,4,0)}.$$

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_3} \;\Rightarrow$



$\overrightarrow{RP} = [P - R] = [(1,2,-1) - (3,1,2)] = (-2,1,-3).$

$\overrightarrow{QS_3} = [S_3 - Q] = [(x,y,z) - (2,-1,1)] = (x-2, y+1, z-1).$

$$\left.\begin{array}{l} x-2=-2 \rightarrow x=0 \\ y+1=1 \rightarrow y=0 \\ z-1=-3 \rightarrow z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{S_3(0,0,-2)}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right).\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right)=\infty-\infty\ \Rightarrow\ Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right)\cdot\left(\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}\right)}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+4x-1}\right)^2-\left(\sqrt{5x^2-6x}\right)^2}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1-(5x^2-6x)}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1-5x^2+6x}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x-1}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10x-1}{x}}{\frac{\sqrt{5x^2+4x-1}}{x}+\frac{\sqrt{5x^2-6x}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{10x-1}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2+4x-1}{x^2}}+\sqrt{\frac{5x^2-6x}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10-\frac{1}{x}}{\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{6}{x}}}=\frac{10-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{5+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{5-\frac{6}{\infty}}}=\frac{10-0}{\sqrt{5+0-0}+\sqrt{5-0}}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\underline{\sqrt{5}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\,tipo\ n^{\underline{o}}\ e\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3+2x-2}{x^2+3}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x-2}{x^2+3}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{(3x-1)\cdot\frac{x^2+3}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right]^{(3x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2+3}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right]^{\frac{6x^2-6x-2x+2}{x^2+3}}=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}}\right]^{\frac{6x^2-8x+2}{x^2+3}}=\underline{e^6}.$$

****

4º) Demuestra que existen $a\epsilon(-1,1)\ y\ \beta\epsilon(-1,1), \alpha \neq \beta$, tales que f'(ɑ) = f'(β) = 0, siendo $f(x) = (x^3+1) \cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}} \cdot \sqrt[3]{(x-1) \cdot sen\frac{\pi x}{2}}$.

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por ser producto de tres funciones continuas y derivables en R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m, n]$ y derivable en (m, n), entonces existe al menos un valor $c \in (m, n)$ que cumple lo siguiente: $f'(c) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$"

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (-1, 0):

$$f(-1) = 0 \cdot e^{\sqrt[3]{-1}} \cdot \sqrt[3]{-2 \cdot sen\frac{-\pi}{2}} = 0.$$

$$f(0) = (0+1) \cdot e^{\sqrt[3]{0+2}} \cdot \sqrt[3]{(0-1) \cdot sen\ 0} = 0.$$

$$f'(a) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ \exists a \in (-1,0)\ tal\ que\ f'(a) = 0.}$

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (0, 1):

$$f(1) = (1+1) \cdot e^{\sqrt[3]{3+2}} \cdot \sqrt[3]{0 \cdot sen\frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$f'(b) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ \exists b \in (0,1)\ tal\ que\ f'(b) = 0.}$

$\underline{Existen\ a\epsilon(-1,1)\ y\ \beta\epsilon(-1,1), \alpha \neq \beta, tales\ que\ f'(a) = f'(b) = 0, c.q.d.}$

****