PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} 2y+z=1 \\ (a-1)x+(a+2)y+z=0 \\ (a^2-a)x-ay=a+2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 \\ a^2-a & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 \\ a^2-a & -a & 0 \end{vmatrix}=2(a^2-a)-a(a-1)-(a+2)(a^2-a)=$$

$$=a(a-1)(2-a-2)-a(a-1)=-a^2(a-1)-a(a-1)=$$

$$=-a(a-1)(a+1)=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=0, a_3=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1-F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Ran\ M=Ran\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6+1-9 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=0 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M=2;\ Ran\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve para $\{a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1\}$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ a+2 & -a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 \\ a^2-a & -a & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2(a+2)-(a+2)^2+a}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{2a+4-(a^2+4a+4)+a}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{3a+4-a^2-4a-4}{-a(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{-a^2-a}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{-a(a+1)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & 1 \\ a^2-a & a+2 & 0 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{(a-1)(a+2)+(a^2-a)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+2a-a-2+a^2-a}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{2a^2-2}{-a(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{2(a^2-1)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{2(a+1)(a-1)}{-a(a-1)(a+1)} = -\frac{2}{a}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-1 & a+2 & 0 \\ a^2-a & -a & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{-a(a-1)-(a+2)(a^2-a)-2(a-1)(a+2)}{-a(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{-a^2+a-(a^3-a^2+2a^2-2a)-2(a^2+a-2)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{-a^2+a-a^3-a^2+2a-2a^2-2a+4}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{-a^3-4a^2+a+4}{-a(a-1)(a+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Descomponiendo\ por\ Ruffini:\ -a^3-4a^2+a+4 = -(a-1)(a+1)(a+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-(a-1)(a+1)(a+4)}{-a(a-1)(a+1)} = \frac{a+4}{a}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{a-1};\ y = -\frac{2}{a};\ z = \frac{a+4}{a}.}$$

Se resuelve ahora el caso de compatible indeterminado:

Para $a = -1$ el sistema es $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$: que es compatible indeterminado; despreciando una de las ecuaciones (primera) y haciendo $x = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow z = -y + 2\lambda = -1 + 2\lambda + 2\lambda = -1 + 4\lambda.$$

$$\underline{Solución\text{: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \quad ,\forall\lambda \in R. \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}}$$

****

2º) Dados los puntos $P(1,-2,3)$ y $Q(3,0,-1)$, $e$ncuentra el punto R que equidista de P y Q y está en la recta $r \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

La expresión de la r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r es $R(4+\lambda, -1+3\lambda, 3+\lambda)$.

Tiene que cumplirse que $\overline{PR} = \overline{QR}$.

$\overline{PR} = \sqrt{(4+\lambda-1)^2 + (-1+3\lambda+2)^2 + (3+\lambda-3)^2} =$

$= \sqrt{(\lambda+3)^2 + (3\lambda+1)^2 + \lambda^2} = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 1 + \lambda^2} =$

$= \sqrt{11\lambda^2 + 12\lambda + 10}$.

$\overline{QR} = \sqrt{(4+\lambda-3)^2 + (-1+3\lambda-0)^2 + (3+\lambda+1)^2} =$

$= \sqrt{(\lambda+1)^2 + (3\lambda-1)^2 + (\lambda+4)^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + \lambda^2 + 8\lambda + 16} = \sqrt{11\lambda^2 + 4\lambda + 18}$.

$\overline{PR} = \overline{QR} \Rightarrow \sqrt{11\lambda^2 + 12\lambda + 10} = \sqrt{11\lambda^2 + 4\lambda + 18};\ 12\lambda + 10 = 4\lambda + 18;$

$8\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 1$.

$R(4+\lambda, -1+3\lambda, 3+\lambda) \Rightarrow \lambda = 1 \ \Rightarrow \ \underline{R(5,2,4)}$.

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El punto medio de los puntos $P(1,-2,3)$ y $Q(3,0,-1)$ es $M(2,-1,1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q-P] = (2,2,-4)$.

El plano π perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por M tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv x + y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $M(2,-1,1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y - 2z + D = 0 \\ M(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 1 - 2 \cdot 1 + D = 0;\ -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1.$

$\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0.$

El punto R pedido es la intersección del plano π con la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (4 + \lambda) + (-1 + 3\lambda) - 2(3 + \lambda) + 1 = 0;$$

$4 + \lambda - 1 + 3\lambda - 6 - 2\lambda + 1 = 0;\ -2 + 2\lambda = 0\ \ -1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$R \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{R(5, 2, 4)}.$$

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas: $I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} \cdot dx$ e $I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} \cdot dx$.

$$I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 + \frac{-29}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 29L|x+3| + C.$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & -2 & x+3 \\ \cline{4-4}
-x^3 & -3x^2 & & x^2 - 3x + 9 \\ \cline{1-3}
 & +3x^2 & -2 & \\
 & +3^2 & +9x & \\ \cline{2-3}
 & & +9x - 2 & \\
 & & -9x - 27 & \\ \cline{3-3}
 & & -29 &
\end{array}$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{x^3-2}{x+3} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 29L|x+3| + C.}$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} \cdot dx = \int \frac{2}{x(x^2-1)} \cdot dx = \int \frac{2}{x(x+1)(x-1)} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x+(-A)}{x(x+1)(x-1)} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ -B+C=0 \\ -A=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-2;$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} B+C=2 \\ -B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2C=2; \;\; C=1; \;\; B=1.$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -2L|x| + L|x+1| + L|x-1| + C =$$

$$= L\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.$$

$$\underline{I_2 = \int \frac{2}{x^3-x} dx = L\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.}$$

****

4º) Demuestra que existe $\alpha \in (1, \sqrt{2})$, tal que $f'(\alpha) = 1$ siendo $f(x) = L\ sen\ \frac{\pi x^2}{4}$.

La derivada de la función es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x^2}{4}}{sen\ \frac{\pi x^2}{4}} = \frac{\pi x}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi x^2}{4}.$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en R le es aplicable el teorema de los valores intermedios a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de los valores intermedios dice que: "*si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces para cada valor m tal que $f(a) < m < f(b)$, exista al menos un valor c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = m$*".

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot cotg\ \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot 0 = 0 < 1.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists a \in (1, \sqrt{2})\ tal\ que\ f'(a) = 1.}$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra todas las matrices B que cumplen $AB = BA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+p & n+q \\ m+2p & n+2q \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n & m+2n \\ p+q & p+2q \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} m+p & n+q \\ m+2p & n+2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n & m+2n \\ p+q & p+2q \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} m+p = m+n \\ m+2p = p+q \\ n+q = m+2n \\ n+2q = p+2q \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} n = p \\ m+n = q \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{B = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m+n \end{pmatrix}}.$$

Ejemplo, a modo de comprobación: $m = 0, n = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left. \begin{matrix} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{A \cdot B = B \cdot A, c.q.c.}$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-3,-2,4)$ y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{2}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=\lambda \\ 3x-y=5-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=5;\ \ x=1;$$

$$y=-2x+\lambda=-2+\lambda \ \ \Rightarrow \ \ r_1 \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r_1 son $A(1,-2,0)$ y $\overrightarrow{v_1}=(0,1,1)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{PA}=[A-P]=(4,0,-4)$.

El plano π_1 que contiene a r_1 y a P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1(P;\ \overrightarrow{v_1},\overrightarrow{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z-4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z-4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$-(x+3)+(y+2)-(z-4)=0;\ -x-3+y+2-z+4=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \pi_1 \equiv x-y+z-3=0.$$

Un punto y un vector director de r_2 son $B(1,1,-3)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,0,2)$.

Los puntos B y P determinan el vector $\overrightarrow{PB}=[B-P]=(4,3,-7)$.

El plano π_2 que contiene a r_2 y a P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_2},\overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z-4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0;$$

$$8(y+2)+3(z-4)-6(x+3)+7(y+2)=0;$$

$$-6(x+3)+15(y+2)+3(z-4)=0;\ \ 2(x+3)-5(y+2)-(z-4)=0;$$

$$2x+6-5y-10-z+4=0 \Rightarrow \ \pi_2 \equiv 2x-5y-z=0.$$

La recta pedida r es la que determinan los planos π_1 y π_2 al cortarse, que es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - z = 0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - 5y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + z = 3 + \lambda \\ 2x - z = 5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 3 + 6\lambda;$$

$$x = 1 + 2\lambda; \;\; z = 3 + \lambda - x = 3 + \lambda - 1 - 2\lambda = 2 - \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}.$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}}.$$

****

3º) Siendo $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$, demuestra que existe $\alpha \in (-1, 1)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{1}{2}$.

La función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m, n]$ y derivable en (m, n), entonces existe al menos un valor $a \in (m, n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$."

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$:

$$f(-1) = \frac{\sqrt[4]{2^1+3\cdot 2^0+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt[4]{2+3+4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$$

$$f(1) = \frac{\sqrt[4]{2^7+3\cdot 2^2+4}}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt[4]{128+12+4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$f'(a) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$\underline{\mathit{Lo\ anterior\ prueba\ que}\ \exists a \in (-1, 1)\ \mathit{tal\ que}\ f'(a) = \frac{1}{2}}.$

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = 2x^3 - 2x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Las dos funciones son continuas y tienen ambas por dominio R.

Las abscisas de los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - x = 2x^3 - 2x;\ \ x^3 - x = 0;\ \ x(x^2 - 1) = 0;$

$x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$

Los puntos de corte son $A(-1,0), O(0,0)\ y\ B(1,0)$.

Por ser $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$, las dos funciones son simétricas con respecto al origen.

Teniendo en cuenta que: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1-4}{8} = -\frac{3}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{8} - 1 = \frac{2-8}{8} = -\frac{6}{8} \end{cases}$, es $f\left(\frac{1}{2}\right) >\ g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Teniendo en cuenta lo anterior y la simetría de las funciones, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 [x^3 - x - (2x^3 - 2x)] \cdot dx =$

$= 2 \cdot \int_0^1 (-x^3 + x) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2}\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

$$\underline{S = \frac{1}{2}\ u^2.}$$

****