PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=1 \\ x+(a+1)y-z=1 \\ -2x-(2a+2)y+(a^2-2)z=a \end{array}\right.$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)(a^2-2)+2(-2a-2)+4+4(a+1)+(-2a-2)-2(a^2-2)=$$

$$=a^3-2a+a^2-2-4a-4+4+4a+4-2a-2-2a^2+4=$$

$$=a^3-a^2-4a+4=0.$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Resolviendo por Ruffini:

$a_1=1,\ a_2=2, a_3=-2.$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq 1 \\ a\neq 2 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang.A' \Rightarrow (C_1, C_3, C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1-4-2+1-2=-9 \neq 0 \Rightarrow Rang.A'=3.$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang.A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 6-6-4+6+6-4=4 \neq 0 \Rightarrow Rang.A'=3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a=1 \\ a=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang.A' \Rightarrow (C_1 = C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang.A'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $\{a \neq 1, a \neq 1, a \neq -2\}$:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 2-2a & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{a+2}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2)z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{a-2}. \quad (a-1)y-3z=0 \Rightarrow y=\frac{3z}{a-1}=\frac{3}{(a-1)(a-2)}.$$

$$x=1-2y-2z=1-\frac{6}{(a-1)(a-2)}-\frac{2}{a-2}=\frac{(a-1)(a-2)-6-2(a-1)}{(a-1)(a-2)}=$$

$$=\frac{a^2-3a+2-6-2a+2}{(a-1)(a-2)}=\frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)}=x.$$

$\underline{Solución: x = \frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)}, y = \frac{3}{(a-1)(a-2)}, z = \frac{1}{a-2}}$.

Para $a = -2$ el sistema resulta $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -2x + 2y + 2z = -2 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ o, también: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 - 2\lambda \\ x - y = 1 + \lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 - 2\lambda \\ 2x - 2y = 2 + 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 3;\ \ x = 1.$$

$$y = x - 1 - \lambda = 1 - 1 - \lambda = -\lambda.$$

$$\underline{Solución: \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda, \forall \lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}}$$

****

2º) Se considera el plano π que pasa por los puntos $P(1,1,3)$, $Q(2,1,0)$ y $R(-1,-4,-1)$. Encuentra el punto de π que más cerca está del punto $S(-3,1,1)$ (o sea, el pie de la perpendicular de S a π).

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2,1,0) - (1,1,3)] = (1,0,-3).$

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-1,-4,-1) - (1,1,3)] = (-2,-5,-4).$

Considerando el punto $P(1,1,3)$:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$6(y-1) - 5(z-3) - 15(x-1) + 4(y-1) = 0;$

$-15(x-1) + 10(y-1) - 5(z-3) = 0;\ \ 3(x-1) - 2(y-1) + (z-3) = 0;$

$3x - 3 - 2y + 2 + z - 3 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0}.$

Un vector normal de π es $\vec{n} = (3,-2,1)$.

La expresión de la recta r, perpendicular a π es: $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El punto M de π pedido es la intersección de la recta r con el plano π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-3+3\lambda) - 2(1-2\lambda) + (1+\lambda) - 4 = 0;$$

$-9 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 1 + \lambda - 4 = 0;\ \ 14\lambda - 14 = 0;\ \ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$\left.\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow\ \underline{M(0,-1,2)}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites: $a)\ \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tag\ x}{1-\cos\ (2x)}$. $\qquad b)\ \lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}}$.

$a)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tag\ x}{1-\cos(2x)} = \frac{0 \cdot tag\ 0}{1-\cos 0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot tag\ x + x \cdot (1+tag^2 x)}{+2 \cdot \text{sen}\ (2x)} = \frac{tag\ 0 + 0 \cdot (1+0)}{2 \cdot \text{sen}\ 0} = \frac{0+0 \cdot 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1+tag^2 x + 1 \cdot (1+tag^2 x) + x \cdot 2 \cdot tag\ x \cdot (1+tag^2 x)}{2 \cdot 2 \cdot \cos(2x)} = \frac{1+0+1 \cdot 1+0}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot tag\ x}{1-\cos(2x)} = \frac{1}{2}.}$$

$b)$

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = 1^{\frac{1}{sen\ \pi}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = A;\ \ LA = L\left[\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}}\right] = \lim_{x \to 1} Lx^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = \lim_{x \to 1}\left[\frac{x}{sen\ (\pi x)} \cdot Lx\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot Lx}{sen\ (\pi x)} = \frac{1 \cdot L1}{sen\ \pi} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x}}{\pi \cdot cos\ (\pi x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1+Lx}{\pi \cdot cos\ (\pi x)} = \frac{1+L1}{\pi \cdot cos\ \pi} = \frac{1+0}{\pi \cdot (-1)} = -\frac{1}{\pi} = LA \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[\pi]{e}}.$$

$$\underline{\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{sen\ (\pi x)}} = \frac{1}{\sqrt[\pi]{e}}.}$$

****

4º) Dadas las funciones $f(x) = |x-1| - 1$ y $g(x) = sen\ \frac{\pi x}{2}$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

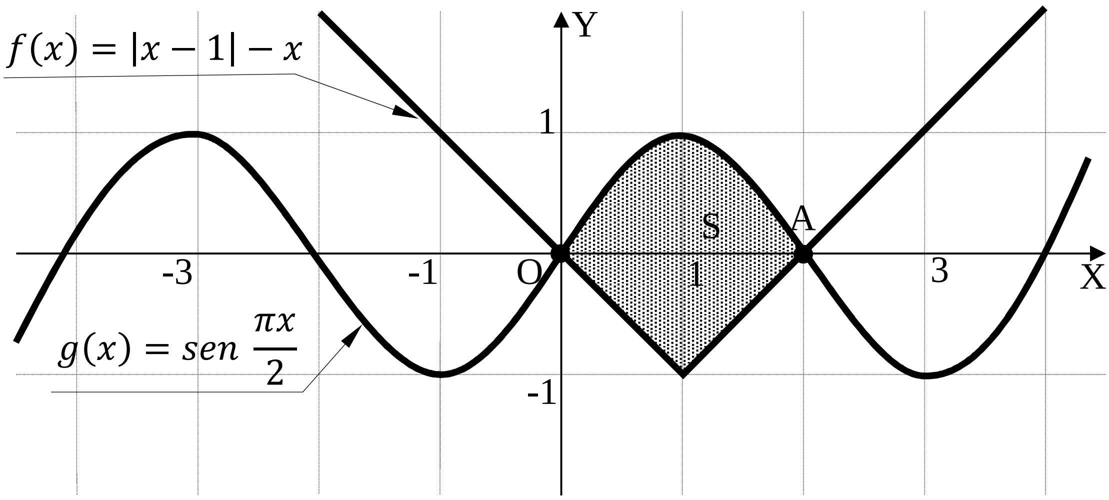
Teniendo en cuanta que $|x-1| = \begin{cases} -x+1 \ si\ x \leq 1 \\ x-1 \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x \leq 1 \\ x-2 \ si\ x > 1 \end{cases}$.

Los puntos de corte se obtienen igualando las dos funciones:

Para $x < 1 \Rightarrow -x = sen\ \frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Para $x > 1 \Rightarrow x - 2 = sen\ \frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2,0)}$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$\int sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \frac{\pi x}{2} = t \to \frac{\pi}{2} dx = dt \to dx = \frac{2}{\pi} dt \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int sen\ t \cdot dt =$

$= -\frac{2}{\pi} \cdot \cos t = -\frac{2}{\pi} cos \frac{\pi x}{2}$.

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 \left[sen\ \frac{\pi x}{2} - (-x) \right] dx + \int_1^2 \left[sen\ \frac{\pi x}{2} - (x-2) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(sen\ \frac{\pi x}{2} + x \right) dx + \int_1^2 \left(sen\ \frac{\pi x}{2} - x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi} cos \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{\pi} cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi} cos \frac{\pi}{2} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \cos 0 + 0\right) +$$

$$+ \left(-\frac{2}{\pi} \cos \pi - \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) =$$

$$= -0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot 1 - \frac{2}{\pi} \cdot (-1) - 2 + 4 + 0 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{\pi} + 1 = \frac{4+\pi}{\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{4+\pi}{\pi} \cong 2{,}27\ u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula A^{57} y A^{-68}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

....

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ n \cdot (-1)^{n+1} & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

$$A^{57} = \begin{bmatrix} (-1)^{57} & 0 \\ 57 \cdot (-1)^{58} & (-1)^{57} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{57} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$$A^{-68} = \begin{bmatrix} (-1)^{-68} & 0 \\ -68 \cdot (-1)^{-67} & (-1)^{-68} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}.}$$

También puede hacerse del siguiente modo:

$$A^{-68} = \frac{1}{A^{68}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} (-1)^{58} & 0 \\ 68 \cdot (-1)^{69} & (-1)^{68} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -68 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -68 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Procediendo por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -68 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 68F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 68 & 1 \end{array}\right).$$

****

2º) Encuentra la ecuación en forma continua de la recta que corta perpendicularmente a $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

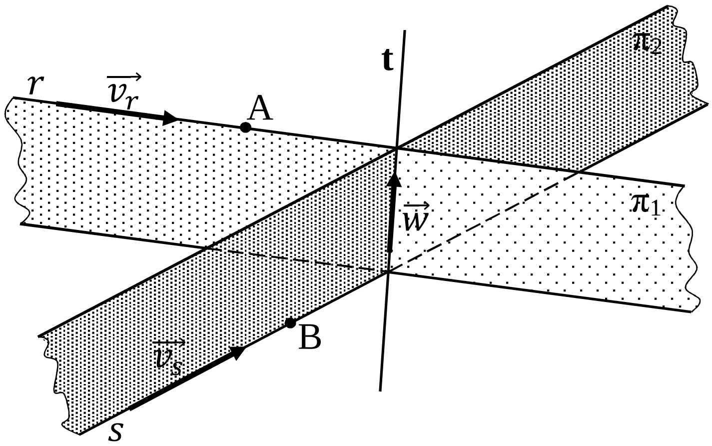
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = -2 + 2\lambda; \;\; z = 3 - x + 2y =$$

$$= 3 - \lambda - 4 + 4\lambda = -1 + 3\lambda \;\; \Rightarrow \;\; r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda. \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $A(0, -2, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 3)$.

Un punto y un vector director de s son $B(2, 4, -2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, -1, 1)$.



Un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 6j - k - 4k + 3i - j = 5i + 5j - 5k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{w} = (1, 1, -1).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A; \; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2x + 3(y + 2) + (z + 1) - 2(z + 1) - 3x + (y + 2) = 0;$$

$$= -5x + 4(y + 2) - (z + 1) = 0; \; -5x + 4y + 8 - z - 1 = 0 \;\; \Rightarrow$$

$\pi_1 \equiv 5x - 4y + z - 7 = 0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= (x-2) + (y-4) + 2(z+2) + (z+2) - (x-2) + 2(y-4) = 0;$

$= 3(y-4) + 3(z+2) = 0;\ \ y - 4 + z + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \pi_2 \equiv y + z - 2 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos anteriormente, π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} 5x - 4y + z - 7 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$

Para expresar t en función continua hacemos:

$z = \lambda;\ \ y = 2 - \lambda;\ \ 5x = 7 + 4y - z = 7 + 8 - 4\lambda - \lambda = 15 - 5\lambda \ \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 - \lambda \ \ \Rightarrow \ \ t \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}}.$$

****

3º) Hallar las asíntotas de la función $y = f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+4}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: Son los valores finitos de x para los cuales la función toma valores finitos, es decir, es el límite cuando $x \to \infty$ de la función.

$$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{2x+4} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ síntotax\ horizontales}.$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$2x + 4 = 0;\ \ x + 2 = 0\ \Rightarrow x = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ x = -2\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}$$

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+4x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2-1}{2x+4} - 2 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1-4x^2-8x}{2x+4} = -4.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = 2x - 4.}$$

****

4º) Dada la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \cdot e^{x^2}$, demuestra que existe un valor $a \in (-1, 1)$ tal que $f'(a) = 2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, lo que implica que $f(-1) = f(1)$ y, en consecuencia, no le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m, n]$ y derivable en (m, n), entonces existe al menos un valor $a \in (m, n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$".

La derivada de la función es la siguiente:

$$f'(x) = \pi x \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \cdot e^{x^2} + sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \cdot 2x \cdot e^{x^2} =$$

$$= x \cdot e^{x^2} \cdot \left[\pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right].$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en R le es aplicable el teorema de los valores intermedios, que dice que: "*si* Escriba aquí la ecuación. *es una función continua en el intervalo* $[a, b]$, *entonces para cada valor* m *tal que* $f(a) < m < f(b)$, *exista al menos un valor c perteneciente al intervalo* (a, b) *tal que* $f(c) = m$".

$$f'(-1) = -1 \cdot e^1 \cdot \left(\pi \cdot cos\frac{\pi}{2} + 2 \cdot sen\frac{\pi}{2}\right) = -e \cdot 2 = -2e < 2.$$

$$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot \left(\pi \cdot cos\frac{\pi}{2} + 2 \cdot sen\frac{\pi}{2}\right) = e \cdot 2 = 2e > 2.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists c \in (-1, 1)\ tal\ que\ f'(c) = 2.}$

****