PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l}(a+1)x-y+(1-a)z=a+1\\(-a-1)x+(a+1)y+(a^2+a-2)z=-1\\(a+1)x-(a+1)y+(1-a^2)z=0\end{array}\right.$, dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a+1 & -1 & 1-a\\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2\\ a+1 & -a-1 & 1-a^2\end{pmatrix}\ y$$

$$M'=\begin{pmatrix}a+1 & -1 & 1-a & a+1\\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 & -1\\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$M'=\begin{pmatrix}a+1 & -1 & 1-a & a+1\\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 & -1\\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_3\to F_3+F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a+1 & -1 & 1-a & a+1\\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 & -1\\ 0 & 0 & a-1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2\to F_2+F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a+1 & -1 & 1-a & a+1\\ 0 & a & a^2-1 & a\\ 0 & 0 & a-1 & -1\end{pmatrix}=M'.$$

$$|M|=\begin{vmatrix}a+1 & -1 & 1-a\\ 0 & a & a^2-1\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a(a+1)(a-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=0, a_2=-1, a_3=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible\ .}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq 1\ y\ a \neq -1$.

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ ay + (a^2-1)z = a \\ (a-1)z = -1 \end{array}\right\}$, cuya solución es la siguiente: $z = \frac{-1}{a-1}$.

$$ay + (a^2-1) \cdot \frac{-1}{a-1} = a;\ \ ay + (a+1)(a-1) \cdot \frac{-1}{a-1} = a;\ ay - (a+1) = a;$$

$$ay - a - 1 = a;\ \ ay = 2a + 1 \Rightarrow y = \frac{2a+1}{a}.$$

$$(a+1)x - \frac{2a+1}{a} + (1-a) \cdot \frac{-1}{a-1} = a + 1;\ \ (a+1)x - \frac{2a+1}{a} + 1 = a + 1;$$

$$(a+1)x = a + \frac{2a+1}{a};\ \ a(a+1)x = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \Rightarrow x = \frac{(a+1)^2}{a(a+1)} = \frac{a+1}{a}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{a+1}{a};\ \ y = \frac{2a+1}{a};\ \ z = \frac{-1}{a-1}, \forall a \in R - \{0, 1, -1\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -1$.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} -y+2z=0 \\ -y=-1 \\ -2z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: x=\lambda;\ \ y=1;\ \ z=\frac{1}{2},\ \forall\lambda\in R.}$$

****

2º) Los puntos $A(2,-3,2)$ y $B(0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\ u^2$.

El punto medio del segmento de extremos A y B es $M(1,-1,0)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 4 - 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(3+2\lambda, 4-\lambda, 4-2\lambda)$.

Los puntos A, B y P determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,-2) - (2,-3,2)] = (-2,4,-4)$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (3+2\lambda, 4-\lambda, 4-2\lambda) - (2,-3,2) =$

$= (1+2\lambda, 7-\lambda, 2-2\lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = 18 \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ 1+2\lambda & 7-\lambda & 2-2\lambda \end{matrix} \right\| =$$

$= (8-8\lambda)i - (4+8\lambda)j - (14-2\lambda)k - (4+8\lambda)k + (28-4\lambda)i + (4-4\lambda)j =$

$= (36-12\lambda)i - 12\lambda j + (-18-6\lambda)k = 36;\ \ (6-2\lambda)i - 2j + (-3-\lambda)k = 6;$

$\sqrt{(6-2\lambda)^2 + (-2)^2 + (-3-\lambda)^2} = 6;\ \ 36 - 24\lambda + 4\lambda^2 + 4 + 9 + 6\lambda + \lambda^2 = 36;$

$5\lambda^2 - 18\lambda + 49 = 36;\ \ 5\lambda^2 - 18\lambda + 13 = 0;\ \ \lambda = \frac{18 \pm \sqrt{324-260}}{10} = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{18 \pm 8}{10} =$

$= \frac{9 \pm 4}{5} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{13}{5};\ \ \lambda_2 = 1.$

Para $P(3+2\lambda, 4-\lambda, 4-2\lambda)$:

$$\lambda_1 = \frac{13}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 3 + \frac{26}{5} = \frac{41}{5} \\ y = 4 - \frac{13}{5} = \frac{7}{5} \\ z = 4 - \frac{26}{5} = -\frac{6}{5} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{41}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{6}{5}\right)}.$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 3 + 2 = 5 \\ y = 4 - 1 = 3 \\ z = 4 - 2 = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{P_2(5, 3, 2)}.$$

****

3º) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo la función $f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

"Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \epsilon (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(\alpha)}{b-a}$".

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{e}{x} \cdot L(x + ex - e).$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{e}{x^2} \cdot L(x + ex - e) + \frac{e}{x} \cdot \frac{1+e}{x+ex-e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{e}{x} \cdot \left[\frac{L(x+ex-e)}{x} - \frac{1+e}{x+ex-e}\right] \cdot (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}.$$

La expresión anterior prueba que la función $f(x)$ es derivable en $(1, e)$, lo que implica, necesariamente que es continua en este intervalo y, como consecuencia:

La función $f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$ es continua en $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$, por lo cual le es aplicable el teorema de Lagrange.

$$f(1) = (1 + e \cdot 1 - e)^{\frac{e}{1}} = 1^e = 1$$

$$f(e) = (e + e \cdot e - e)^{\frac{e}{e}} = e^2$$

$$f'(a) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{e^2-1}{e-1} = \frac{(e+1)(e-1)}{e-1} = e + 1.$$

$$\underline{\mathit{Queda\ probado\ que\ existe}\ \alpha \in (1, e)\ \mathit{tal\ que}\ f'(\alpha) = e + 1.}$$

****

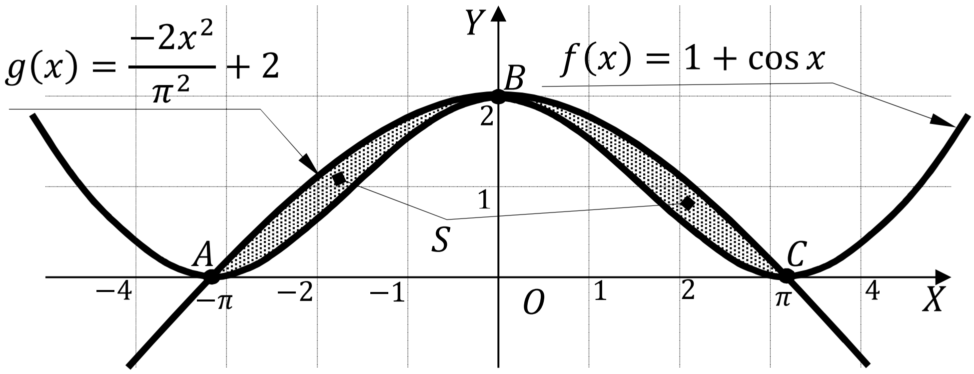
4º) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrado entre ambas gráficas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2;\ \ \cos x = 1 - \frac{2x^2}{\pi^2} \Rightarrow \frac{2x^2}{\pi^2} \geq 0;\ x^2 \geq 0.$$

Los puntos que cumplen la condición son: $\begin{cases} x_1 = -\pi \to A(-\pi, 0) \\ x_2 = 0 \to B(0, 2) \\ x_2 = \pi \to C(\pi, 2) \end{cases}$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.



Teniendo en cuanta la simetría de ambas funciones con respecto al eje de ordenadas, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\pi} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2\right) - (1 + \cos x)\right] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 - 1 - \cos x\right) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 1 - \cos x\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{-2 \cdot x^3}{3\pi^2} + x + sen\ x\right]_0^{\pi} = 2 \cdot \left[\left(\frac{-2 \cdot \pi^3}{3\pi^2} + \pi + sen\ \pi\right) - (0 + 0 + sen\ 0)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{-2\pi}{3} + \pi + 0\right) - 0\right] = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{2\pi}{3}\ u^2 \cong 2{,}09\ u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -t \\ t+1 & 1-t \end{vmatrix} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} t & t+1 \\ t-1 & t+1 \end{vmatrix} =$$

$$= [(t-1) \cdot t(t+1)] \cdot t \cdot (t+1) \begin{vmatrix} t & 1 \\ t-1 & 1 \end{vmatrix} = t^2(t+1)^2(t-1) \cdot (t-t+1) =$$

$$= t^2(t+1)^2(t-1).$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + B| = 0.$$

$$|A \cdot B| = |A + B| \Rightarrow t^2(t+1)^2(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 1.$$

$$\underline{|A \cdot B| = |A + B| \Rightarrow t = 0, t = -1, t = 1}.$$

****

2º) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por $P(1,-1,1)$ y que corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

En primer lugar se hace un estudio de la posición relativa de las rectas r y s.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-z=1+\lambda \\ 3y-2z=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2y+2z=-2-2\lambda \\ 3y-2z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-5-2\lambda;\ -x+y-z-1=0 \Rightarrow z=-x+y-1=$$

$$=-\lambda-5-2\lambda-1=-6-3\lambda=z\ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-5-2\lambda. \\ z=-6-3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

r: $A(0,-5,-6)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-2,-3)$. $\quad s$: $B(3,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(0,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=[B-A]=[(3,1,-1)-(0,-5,-6)]=(3,6,-5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -5+6+9+6=16 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}=3\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

Se resuelve el ejercicio de tres formas diferentes:

PRIMERA FORMA:

Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \rightarrow contiene\ a\ P\ y\ a\ r \\ \pi_2 \rightarrow contiene\ a\ P\ y\ a\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La recta } t \text{ es la intersección de } \pi_1\ y\ \pi_2.$$

Se determina $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AP} = [P - A] = [(1, -1, 1) - (0, -5, -6)] = (1, 4, 7)$.

$$\pi_1(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{n_1}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-14(x-1) - 3(y+1) + 4(z-1) + 2(z-1) + 12(x-1) - 7(y+1) = 0;$$

$$-2(x-1) - 10(y+1) + 6(z-1) = 0;\ \ (x-1) + 5(y+1) - 3(z-1) = 0;$$

$$x - 1 + 5y + 5 - 3z + 3 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 5y - 3z + 7 = 0.$$

Se determina $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{BP} = [P - B] = [(1, -1, 1) - (3, 1, -1)] = (-2, -2, 2)$.

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{n_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x-1) + 2(y+1) + 2(z-1) - 2(x-1) = 0;\ \ 2(y+1) + 2(z-1) = 0;$$

$$(y+1) + (z-1) = 0;\ \ y + 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + z = 0.$$

$$t \equiv \begin{cases} x + 5y - 3z + 7 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda; y = -\lambda;\ x = -7 + 5\lambda + 3\lambda = -7 + 8\lambda.$$

$$\underline{t \equiv \frac{x+7}{8} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}}.$$

SEGUNDA FORMA:

Se determinan el plano π_1 y el punto M de las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \rightarrow contiene\ a\ P\ y\ a\ r \\ M \rightarrow intersección\ de\ \pi_1\ y\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La recta } t \text{ es la que pasa por P y M.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + 5y - 3z + 7 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 - \mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + 5(1 + \mu) - 3(-1 - \mu) + 7 = 0;$$

$$3+5+5\mu+3+3\mu+7=0;\;\; 8\mu=-18 \Rightarrow \mu=-\frac{9}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4} \\ z=-1+\frac{9}{4}=\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\left(3,-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right).$$

$$\overrightarrow{MP}=[P-M]=\left[(1,-1,1)-\left(3,-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)\right]=\left(-2,\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=(8,-1,1).$$

$$\underline{t \equiv \frac{x+7}{8}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}}.$$

TERCERA FORMA

Se determinan los vectores $\overrightarrow{AP}\ y\ \overrightarrow{BP}$ de las siguientes características:

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow punto\ genérico\ de\ r \\ B \rightarrow punto\ genérico\ de\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP}$$ $\Rightarrow$ La recta t es la que pasa por A y B.

$$A \in r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-5-2\lambda \\ z=-6-3\lambda \end{array}\right. \Rightarrow A(\lambda,-5-2\lambda,-6-3\lambda).$$

$$\overrightarrow{AP}=[P-A]=[(1,-1,1)-(\lambda,-5-2\lambda,-6-3\lambda)]=(1-\lambda,4+2\lambda,7+3\lambda).$$

$$B \in s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1+\mu \\ z=-1-\mu \end{array}\right. \Rightarrow B(3,1+\mu,-1-\mu).$$

$$\overrightarrow{BP}=[P-B]=[(1,-1,1)-(3,1+\mu,-1-\mu)]=(-2,-2-\mu,2+\mu).$$

$$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP} \Rightarrow \frac{1-\lambda}{-2}=\frac{4+2\lambda}{-2-\mu}=\frac{7+3\lambda}{2+\mu} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2-\mu+2\lambda+\lambda\mu=-8-4\lambda \\ 2+\mu-2\lambda-\lambda\mu=-14-6\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6-\mu+6\lambda+\lambda\mu=0 \\ 16+\mu+4\lambda-\lambda\mu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 22+10\lambda=0 \rightarrow \lambda=-\frac{11}{5}.$$

$$\mu(\lambda-1)=-6-6\lambda \Rightarrow \mu=\frac{-6-6\lambda}{\lambda-1}=\frac{-6+\frac{66}{5}}{-\frac{11}{5}-1}=\frac{-30+66}{-11-5}=\frac{36}{-16}=-\frac{9}{4}.$$

$$A(\lambda,-5-2\lambda,-6-3\lambda) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{11}{5} \\ y=-5+\frac{22}{5}=-\frac{3}{5} \\ z=-6+\frac{33}{5}=\frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(-\frac{11}{5},-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right).$$

$$B(3, 1+\mu, -1-\mu) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 3 \\ y = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \\ z = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \end{Bmatrix} \Rightarrow B\left(3, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = \left[\left(3, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{60}{20}, -\frac{25}{20}, \frac{25}{20}\right) - \left(-\frac{44}{20}, -\frac{12}{20}, \frac{12}{20}\right)\right] = \left(\frac{104}{20}, \frac{13}{20}, \frac{13}{20}\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (8, -1, 1).$$

$$\underline{t \equiv \frac{x+7}{8} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}}.$$

****

3º) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en R: $f(x)=\begin{cases}\log(x^2+9) & x\leq 1\\ \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)} & x>1\end{cases}$.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}[\log(x^2+9)]=\log 10=1=f(1)\\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)}=\frac{\pi}{2a}\ \ (*)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow 1=-\frac{\pi}{2a}\Rightarrow\ \underline{a=\frac{\pi}{2}}.$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)}=\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1-1}=\frac{1}{a}\cdot\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{0-1}=\frac{\pi}{2a}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{1}=\frac{\pi}{2a}\cdot 1=\frac{\pi}{2a}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases}\log(x^2+9) & x\leq 1\\ \frac{2\cos\frac{\pi x}{2}}{\pi\cdot(1-x)} & x>1\end{cases}$.

****

4º) Demuestra que la función $f(x) = \cos(\pi x) \cdot L(x^2 - 3x + 2)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La función $g(x) = \cos(\pi x)$ es continua y derivable en R.

$x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$

La parábola $y = x^2 - 3x + 2$ es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2, por lo cual tiene su mínimo en el intervalo $(1, 2)$ y, teniendo en cuenta el signo de la expresión $x^2 - 3x + 2 < 0, \forall x \in (1, 2)$, se deduce el dominio de la función $h(x) = L(x^2 - 3x + 2)$, que es $D(h) \Rightarrow (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

De lo anterior se deduce que $D(f) \Rightarrow (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = -\pi \cdot \text{sen}\ (\pi x) \cdot L(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$

$f'(-1) = -\pi \cdot \text{sen}\ (-\pi) \cdot L(1 + 3 + 2) + \cos(-\pi) \cdot \frac{-2-3}{1+3+2} = 0 - 1 \cdot \frac{-5}{6} = \frac{5}{6}.$

$f'(0) = -\pi \cdot \text{sen}\ \ 0 \cdot L(2) + \cos 0 \cdot \frac{-3}{2} = 0 + 1 \cdot \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(-1, 0)$.

Por ser $f(-1) \neq f(0)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$”.

Como es $f'(-1) > 0\ y\ f'(0) < 0$ y la función $f(x)$ es creciente en $x = -1$ y decreciente en $x = 0$, necesariamente tiene al menos un máximo en $(-1, 0)$.

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ lo\ pedido.}$

****