PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a & 3a-1 \\ a+2 & -2 & 2-2a & -2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & -1 & 2-a \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a^2-3a+2) = 0 \Rightarrow a_1 = -2; \;\; a^2-3a+2 = 0; \;\; a = \tfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$$

$$= \tfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \tfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_2 = 1, a_3 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 16 - 20 + 16 + 40 + 16 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -7 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -7 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 24 + 28 + 24 - 42 - 16 = -6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a = 2 \\ a = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 1, a \neq 2\ y\ a \neq -2$:

$$\left.\begin{matrix} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2 - a)z = 3a - 1 \\ (a+2)x - 2y + (2 - 2a)z = -2a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (a+2)x - y - az = -a \\ y + (a^2 - 2a)z = 2a - 1 \\ -y + (2 - a)z = -a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (a+2)x - y - az = -a \\ y + (a^2 - 2a)z = 2a - 1 \\ (a^2 - 3a + 2)z = a - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = \frac{a-1}{a^2-3a+2} = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2}.$$

Sustituyendo el valor de z en la expresión $y + (a^2 - 2a)z = 2a - 1$:

$$y + (a^2 - 2a) \cdot \frac{1}{a-2} = 2a - 1;\ \ y + a(a-2) \cdot \frac{1}{a-2} = 2a - 1;$$

$$y + a = 2a - 1 \Rightarrow y = a - 1.$$

Sustituyendo en la primera ecuación los valores obtenidos de $z\ e\ y$:

$$(a+2)x-y-az=-a \Rightarrow \left\{\begin{matrix} z=\frac{1}{a-2} \\ y=2a-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+2)x-a+1-\frac{a}{a-2}=-a;\;\; (a+2)x=-1+\frac{a}{a-2}=\frac{-a+2+a}{a-2}=\frac{2}{a-2};$$

$$(a+2)x=\frac{2}{a-2} \Rightarrow x=\frac{2}{(a-2)(a+2)}=\frac{2}{a^2-4}.$$

$$\underline{Solución\text{: } x=\frac{2}{a^2-4};\;\; y=a-1;\;\; z=\frac{1}{a-2}, \forall a \in R-\{1,2,-2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a=1$; el sistema resulta $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ -3x+2y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{matrix} 3x-y-z=-1 \\ -3x+2y=2 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} 3x-y=-1+\lambda \\ -3x+2y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=1+\lambda.$$

$$3x-y=-1+\lambda;\;\; 3x=-1+\lambda+1+\lambda=2\lambda \Rightarrow x=\frac{2}{3}\lambda.$$

$$\underline{Solución\text{: } x=\frac{2}{3}\lambda;\;\; y=1+\lambda;\;\; z=\lambda,\; \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$, calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta r y que diste de s tres unidades.

El plano π pedido es paralelo a las dos rectas.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2k + 2i - 2j = 3i - 2j + 2k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3, -2, 2).$$

Un punto y un vector de la recta s son $P(-2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 2, 2)$.

El plano β que es paralelo a r y contiene a s tiene la siguiente ecuación general:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-4(x+2) + 2(y-1) + 6(z-1) + 2(z-1) - 4(x+2) - 6(y-1) = 0;$$

$$-8(x+2) - 4(y-1) + 8(z-1) = 0;\ \ 2(x+2) + (y-1) - 2(z-1) = 0;$$

$$2x + 4 + y - 1 - 2z + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \beta \equiv 2x + y - 2z + 5 = 0.$$

El haz de planos γ paralelos a β es $\gamma \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

El plano π pedido es el correspondiente plano del haz γ que equidista 3 unidades del plano β.

La distancia entre los planos paralelos $\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$ viene dada por la fórmula: $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicada la fórmula al plano $\beta \equiv 2x + y - 2z + 5 = 0$ y a un plano perteneciente al haz $\gamma \equiv 2x + y - 2z + D = 0$, sabiendo que la distancia entre ambos es 3:

$$d = \frac{|5-D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3;\ \ |5-D| = 3 \cdot \sqrt{4+1+4} = 3 \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9.$$

$$|5-D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 5 - D = 9 \rightarrow D_1 = -4 \\ -5 + D = 9 \rightarrow D_2 = 14 \end{cases}.$$

Los planos pedidos, que son dos, son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 4 = 0 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 14 = 0}.$$

****

3º) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$a)\ f(x) = L\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{sen\ 2x}}.$ $\qquad$ $b)\ g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}.$

$a)$

$$f(x) = L\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{sen\ 2x}} = L(1-\cos 2x) - L\ sen\ 2x.$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot sen\ 2x}{1-\cos 2x} - \frac{2\cdot \cos 2x}{sen\ 2x} = \frac{2\cdot sen^2\ 2x - 2\cdot \cos 2x + 2\cdot cos^2\ 2x}{sen\ 2x\cdot (1-\cos 2x)} =$$

$$= 2\cdot \frac{sen^2\ 2x - \cos 2x + cos^2\ 2x}{sen\ 2x\cdot (1-\cos 2x)} = 2\cdot \frac{1-\cos 2x}{sen\ 2x\cdot (1-\cos 2x)} = \frac{2}{sen\ 2x}.$$

$$\underline{f(x) = L\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{sen\ 2x}} \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{2}{sen\ 2x}.}$$

$b)$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = x^x.$$

Tomando logaritmos neperianos: $L\ [g(x)] = x \cdot Lx.$

Derivando: $\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx;\ \ g'(x) = (1 + Lx) \cdot g(x).$

$$\underline{g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \ \Rightarrow\ g'(x) = (1 + Lx) \cdot x^x.}$$

****

4º) Demuestra que existe $a \in (-1,3)$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{4}$, siendo:

$$f(x) = [x^2 + \log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}.$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que "si una función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La parábola $y = x^2 - 2x + 7$ es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice es el siguiente: $y'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,6)$. Esto supone que la expresión $x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \in R, \forall x \in R$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}} \in R, \forall x \in R$, la función $f(x)$ es continua en su dominio que es R.

En cuanta a su derivabilidad, considerando $f(x) = g(x)^{h(x)}$, es:

$L[f(x)] = h(x) \cdot L[g(x)]$; la función $L[g(x)]$ es derivable en R y, en cuanto a la derivada de $h(x)$:

$h(x) = \sqrt[3]{\frac{3-x}{4}} = \left(\frac{3-x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3-x}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{4}{3-x}\right)^{\frac{2}{3}}$; resulta que $h'(x)$ es derivable $\forall x \in R - \{3\}$.

Lo expuesto anteriormente prueba que $f(x)$ es continua en $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$, por lo que le es aplicable el teorema de Lagrange en el intervalo $(-1,3)$.

$$f(3) = [3^2 + \log(3^2 - 2 \cdot 3 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}} = (9 + \log 10)^0 = 10^0 = 1.$$

$$f(-1) = [(-1)^2 + \log(1 + 2 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3+1}{4}}} = (1 + \log 10)^1 = 2^1 = 2.$$

$$f'(a) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{1-2}{3+1} = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{\exists a \in (-1,3)\ tal\ que\ f'(a) = -\frac{1}{4}, como\ teníamos\ que\ demostrar.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Las sucesivas potencias de la matriz A son las siguientes:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$A^{35} = A^{33} \cdot A^2 = (A^3)^{10} \cdot A^2 = I^{10} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{25} = A^{24} \cdot A = (A^3)^8 \cdot A = I^8 \cdot A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación resulta: $X \cdot A^2 = A$.

$X \cdot A^2 = A;\ \ X \cdot A^2 \cdot (A^2)^{-1} = A \cdot (A^2)^{-1};\ \ X \cdot I = A \cdot (A^2)^{-1} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ X = A \cdot (A^2)^{-1}.$ (*)

La inversa de A^2 se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^2/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Sustituyendo en la expresión (*):

$$X = A \cdot (A^2)^{-1} = A \cdot A = A^2 \ \Rightarrow\ \underline{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) $P(1,-1,1), Q(5,-3,5)\ y\ R(7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

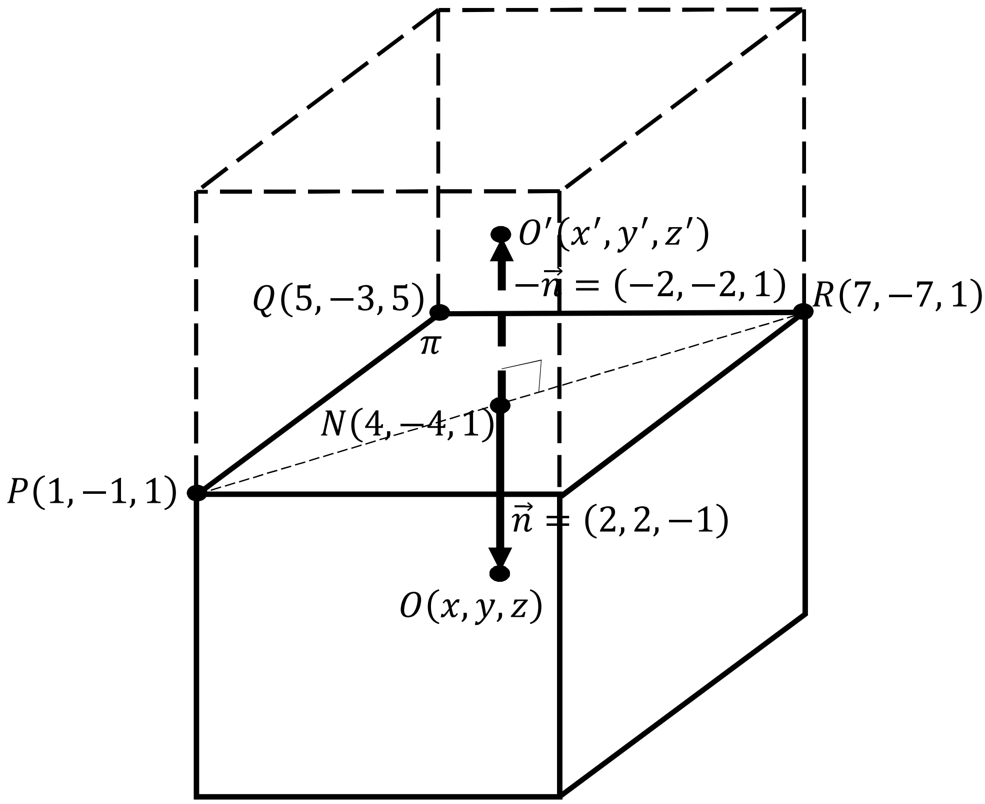
$$\overline{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (-3+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} =$$

$$= \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(7-1)^2 + (-7+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(7-5)^2 + (-7+3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2} =$$

$$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$



La longitud del lado del cubo es de 6 unidades.

El punto $N(4,-4,1)$ es el punto medio de $P(1,-1,1)\ y\ R(7,-7,1)$, que son opuestos en la cara del cubo.

El plano π que determinan los puntos $P(1,-1,1), Q(5,-3,5)\ y\ R(7,-7,1)$ es el siguiente:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(5,-3,5) - (1,-1,1)] = (4,-2,4) \Rightarrow \vec{u} = (2,-1,2).$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = [(7,-7,1) - (1,-1,1)] = (6,-6,0) \Rightarrow \vec{v} = (1,-1,0).$$

$$\pi(P;\ \vec{u},\vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(y+1) - 2(z-1) + (z-1) + 2(x-1) = 0;$$

$$2(x-1) + 2(y+1) - (z-1) = 0;\ \ 2x - 2 + 2y + 2 - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z + 1 = 0.$$

Un vector normal de π es $\vec{n} = (2, 2, -1)$, cuyo módulo es $|\vec{n}| = 3$ unidades, que es, precisamente la mitad de la longitud del lado del cubo.

$$\overrightarrow{NO} = \vec{n} \Rightarrow (x-4, y+4, z-1) = (2, 2, -1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 4 = 2 \rightarrow x = 6 \\ y + 4 = 2 \rightarrow y = -2 \\ z - 1 = -1 \rightarrow z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O(6, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{NO'} = -\vec{n} \Rightarrow (x-4, y+4, z-1) = (-2, -2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 4 = -2 \rightarrow x = 2 \\ y + 4 = -2 \rightarrow y = -6 \\ z - 1 = 1 \rightarrow z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow O'(2, -6, 2).$$

$\underline{\textit{Los centros de los dos cubos posibles son } O(6, -2, 0) \textit{ y } O'(2, -6, 2).}$

****

3º) Demuestra que existe $a \in (1,3)$ tal que $f(a)=0$, siendo $f(x)=\frac{L\left(x-1+sen^2\frac{\pi x}{4}\right)}{4x-x^2}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Se considera la función $g(x)= L\left(x-1+sen^2\frac{\pi x}{4}\right)$:

Para $x \geq 1$ es $x-1+sen^2\frac{\pi x}{4}>0$, por lo cual la función $g(x)$ está definida y es continua en el intervalo $(1,3)$; por otra parte, la expresión $4x-x^2$ se anula únicamente para los valores $x=0\ y\ x=4$, por lo cual la función $f(x)=\frac{L\left[x-1+sen^2\frac{\pi x}{4}\right]}{4x-x^2}$ es continua en el intervalo $(1,3)$.

El teorema de los Valores Intermedios dice que: "si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[m,n]$ se cumple que para un valor p tal que $f(m)<p<f(n)$ o también $f(m)>p>f(n)$, existe al menos un valor $a \in [m,n]$ tal que $f(a)=p$".

Aplicando el mencionado teorema a la función $f(x)$ en el intervalo $[1,3]$.

$$f(1)=\frac{L\left[1-1+sen^2\frac{\pi}{4}\right]}{4-1}=\frac{L\frac{1}{2}}{3}=\frac{L1-L2}{3}=-\frac{L2}{3}<0.$$

$$f(3)=\frac{L\left[3-1+sen^2\frac{3\pi}{4}\right]}{12-9}=\frac{L[2+sen^2\,135°]}{3}=\frac{L\left[2+\frac{1}{2}\right]}{3}=\frac{L\frac{5}{2}}{3}=\frac{L5-L2}{3}>0.$$

Como quiera que $f(3)>0>f(1)$, queda probado que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ toma\ el\ valor\ 0, al\ menos\ una\ vez, en\ el\ intervalo\ (1,3)}.$$

Nota: Este ejercicio también puede resolverse por el teorema de Bolzano.

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones: $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

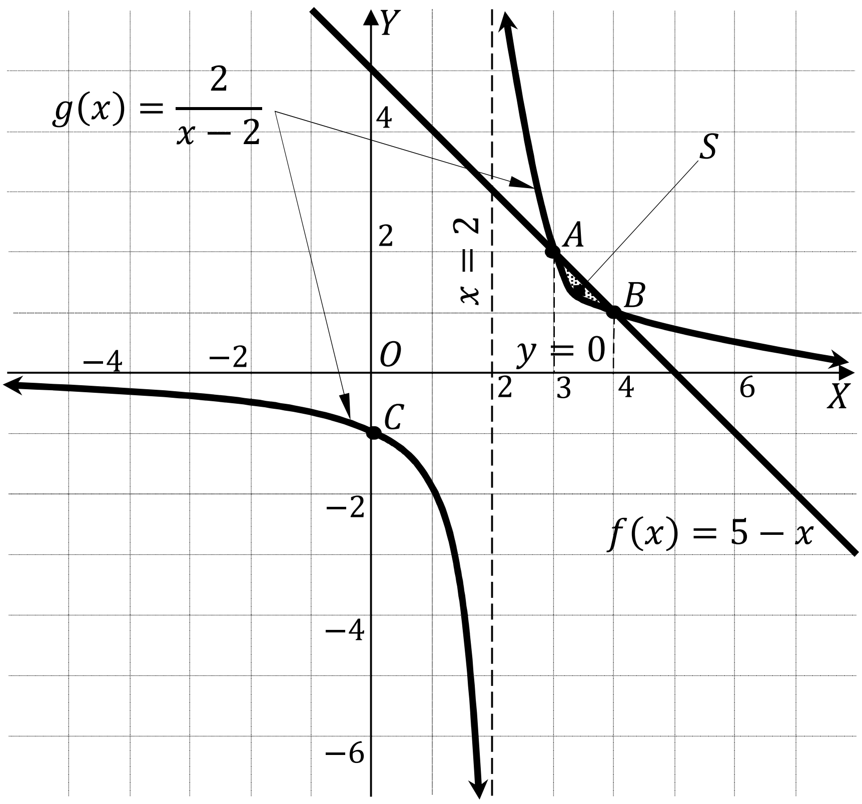
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5 - x = \frac{2}{x-2};\ \ 5x - 10 - x^2 + 2x = 2;\ \ x^2 - 7x + 12 = 0;$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$\underline{Los\ puntos\ de\ corte\ son\ A(3,2)\ y\ B(4,1).}$

La función $f(x) = 5 - x$ es una recta de pendiente $m = -1$ que tiene como ordenada en el origen $n = 5$; además, pasa por los puntos $A(3,2)\ y\ B(4,1)$.

La función $g(x) = \frac{2}{x-2}$ es una hipérbola cuya asíntota horizontal es el eje OX, por ser $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x-2} = 0$. Su asíntota vertical es la recta $x = 2$ por anularse el denominador para este valor. Sabiendo que pasa por $A(3,2)\ y\ B(4,1)$ y por el punto $C(0,-1)$, su representación gráfica es la indicada en la figura adjunta.



Por ser todas las ordenadas de la función $f(x)$ mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$ en el intervalo de la superficie a calcular que es $(3,4)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_3^4 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_3^4 \left[(5 - x) - \frac{2}{x-2}\right] \cdot dx =$$

$$= \int_3^4 \left(5 - x - \frac{2}{x-2}\right) \cdot dx = \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_3^4 - \int_3^4 \left(\frac{2}{x-2}\right) \cdot dx = M - N. \qquad (*)$$

$$M = \left(4 \cdot 4 - \frac{4^2}{2}\right) - \left(5 \cdot 3 - \frac{3^2}{2}\right) = 16 - 4 - 15 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

$$N = \int_3^4 \frac{2}{x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x - 2 = t \\ dx = dt \end{matrix} \left| \begin{matrix} x = 4 \rightarrow t = 2 \\ x = 3 \rightarrow t = 1 \end{matrix} \right. \right\} \Rightarrow \int_1^2 \frac{2}{t} \cdot dt = 2 \cdot [Lt]_1^2 =$$

$$= 2 \cdot (L2 - L1) = 2 \cdot (L2 - 0) = 2 \cdot L2 = N.$$

Sustituyendo los valores de M y N obtenidos en la expresión (*):

$$S = M - N = 1{,}5 - 2L2 = 1{,}5 - L4 = 1{,}500 - 1{,}386 = 0{,}114.$$

$$\underline{S = 0{,}114\, u^2}.$$

****